ANÁLISE DE UMA DEFORMAÇÃO DO MAPA LOGÍSTICO ATRAVÉS DO q-PRODUTO NO LIMIAR DO CAOS

Robson Wilson Silva Pessoa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Industrial, da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Industrial.

Orientador: Ernesto Pinheiro Borges

Salvador

Fevereiro de 2013

ANÁLISE DE UMA DEFORMAÇÃO DO MAPA LOGÍSTICO ATRAVÉS DO q-PRODUTO NO LIMIAR DO CAOS

Robson Wilson Silva Pessoa

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA INDUSTRIAL.

Aprovada por:

Prof. Ernesto Pinheiro Borges,

D.Sc. em Física pela Centro Brasileiro de Pesquisa em Física

Prof. Ugur Tirnakli,

D.Sc. em Física pela Universidade Ege

Profª Suani Tavares Rubim de Pinho,

D.Sc. em Física pela Universidade de São Paulo

SALVADOR, BA – BRASIL

FEVEREIRO DE 2013

Pessoa, Robson Wilson Silva

Análise de uma deformação do mapa logístico através do q-produto no limiar do caos/Robson Wilson Silva Pessoa. – Salvador: UFBA, 2013.

XI, 66 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Ernesto Pinheiro Borges

Dissertação (mestrado) – UFBA/Programa de Engenharia Industrial, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 62 – 66.

1. sistemas dinâmicos. 2. q-gaussianas. 3. mecânica estatística não extensiva. 4. sistemas dissipativos. 5. sistemas conservativos. I. Borges, Ernesto Pinheiro. II. Universidade Federal da Bahia, Programa de Engenharia Industrial. III. Título.

À minha família e amigos

Agradecimentos

Resumo da Dissertação apresentada à UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE UMA DEFORMAÇÃO DO MAPA LOGÍSTICO ATRAVÉS DO q-PRODUTO NO LIMIAR DO CAOS

Robson Wilson Silva Pessoa

Fevereiro/2013

Orientador: Ernesto Pinheiro Borges

Programa: Engenharia Industrial

Foi investigada uma generalização do mapa logístico na forma $x_{n+1} = 1 - ax_n \otimes_{q_{map}} x_n$ $(-1 \leq x_n \leq 1,\ 0 < a \leq 2)$, onde $\otimes_q$ representa uma generalização do produto ordinário, conhecido como q-produto. O produto usual, e consequentemente o mapa logístico usual, é recuperado para o limite $q \to 1$. O mapa da cabana é também um caso particular para $q_{map} \to \infty$. A generalização deste (e de outros) operadores algébricos tem sido amplamente utilizados no contexto da mecânica estatística não extensiva. O foco deste trabalho foi a análise do limiar do caos para $q_{map} > 1$ particularmente para o primeiro ponto crítico a_c, que apresenta dependência com q_{map}. Diagramas de bifurcação, sensibilidade às condições iniciais, dimensão fractal, taxa de relaxação para o atrator, e taxa de crescimento da entropia foram avaliados em $a_c(q_{map})$, e conexões com a mecânica estatística não extensiva foram exploradas. O mapa q-logístico pode apresentar coexistência de atratores e caos robusto para $q_{map} > 2$.

Abstract of Dissertation presented to PEI/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF A DEFORMATION OF THE LOGISTIC MAP THROUGH THE q-PRODUCT AT THE EDGE OF CHAOS

Robson Wilson Silva Pessoa

February/2013

Advisor: Ernesto Pinheiro Borges

Program: Industrial Engineering

A generalisation of the logistic map as $x_{n+1} = 1 - ax_n \otimes_{q_{map}} x_n$ ($-1 \leq x_n \leq 1$, $0 < a \leq 2$) was investigated, where $\otimes_q$ stands for a generalisation of the ordinary product. The usual product, and consequently the usual logistic map, is recovered in the limit $q \to 1$, The tent map is also a particular case for $q_{map} \to \infty$. The generalisation of this (and others) algebraic operator has been widely used within nonextensive statistical mechanics context. I focus the analysis for $q_{map} > 1$ at the edge of chaos, particularly at the first critical point, that depends on the value of q_{map}. Bifurcation diagrams, sensitivity to initial conditions, fractal dimension, rate of relaxation to the attractor, and rate of entropy growth are evaluated at $a_c(q_{map})$, and connections with nonextensive statistical mechanics are explored. The q-map may present coexistence of attractors and robust chaos for $q_{map} > 2$.

Sumário

Lista de Figuras **x**

1 Introdução **1**

1.1 Distribuições não-extensivas 4

1.2 Operações algébricas generalizadas 7

1.2.1 Lei dos erros de Gauss e sua generalização 9

2 Sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade e algebra generalizada **12**

2.1 Dinâmica 12

2.2 Sistema conservativos de baixa dimensionalidade 13

2.3 Sistemas dissipativos de baixa dimensionalidade 14

2.3.1 Mapa logístico 14

2.3.2 Mapas logísticos deformados 19

3 Sensibilidade às condições iniciais **23**

3.1 Expoente de Liapunov 24

3.2 Expoente de Liapunov generalizado 25

3.3 Método da taxa de crescimento da entropia 33

4 Métodos de relaxação **39**

4.1 Dinâmica de relaxação 39

4.2 Distribuições quase-estacionárias 42

5 Conclusões **46**

A Apêndice **49**

A.1 Limites para o q-produto 49

A.2 Derivada schwarziana 54

A.3 q-Exponencial 57

A.4 q-Gaussiana 58

Referências Bibliográficas **62**

Lista de Figuras

1.1 Função q-exponecial e q-logaritimo para diferentes valores de q. 6

1.2 Função q-gaussiana para diferentes valores de q. 7

2.1 x_1 em função de x_0 para o mapa logistico,$\mu = 2$. 15

2.2 Histograma do mapa logístico para o ponto Misiurewicz 18

2.3 21

2.4 Diagrama de bifurcação para diferentes valores de q_{map}. 22

3.1 Expoente de Liapunov como uma função de do parâmetro de controle para diferentes valores de q_{map}. 28

3.2 Expoente de Liapunov maximo para $q_{map} = 1.25$ para a região da janela mais larga , de ciclo 3. 29

3.3 Sensibilidade às condições iniciais, L em função de q_{map} 31

3.4 Dependência do primeiro ponto de bifurcação por acumulação de duplicação de período a_c sobre q_{map}. 32

3.5 Número integrado de visitas por célula 36

3.6 Número de células com mais de 5000 visitas numa corrida de 50 iteradas como uma função de q_{map} 36

3.7 Entropia média para $q_{map} = 1.1$. 37

3.8 q_{ent} em função de q_{map}. 38

4.1 Relaxação ao atrator crítico para o limiar do caos. 40

4.2 Dimensão fractal para o limiar do caos como uma função do q_{map}. . . 41

4.3 q-Gaussianas para diferentes valores de q_{map} 45

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação está dividida nos seguintes capítulos: o capítulo 1 trata de alguns conceitos iniciais sobre sistemas dinâmicos, caos, fractais, algebra generalizada e mecânica estatística; o capítulo 2 trata dos sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade, introduz um novo mapa deformado através de uma algebra generalizada. O capítulo 3 faz uma analise das trajetórias de várias condições iniciais para o mapa logístico generalizado (mapa q-logístico) no limiar do caos e apresenta a caracterização através do expoente de Lyapunov; o capítulo 4 apresenta a estimativa dos parâmetros de crescimento da entropia de Tsallis para o mapa q-logístico no limiar do caos, e também são estimados os parâmetro de relaxação da entropia de Tsallis em função do parâmetro de deformação do mapa q-logístico e algumas distribuições no limiar do caos; o capítulo 5 finaliza com as conclusões.

A manifestação de fenômenos com propriedades especiais como fractalidade, quebra de ergodicidade, correlações espaço-temporais de longo alcance, memória de longa duração, criticalidade auto-organizada etc., estabeleceu uma classe de sistemas chamados de *complexos*. Estas propriedades estão presentes em muitos sistemas físicos, biológicos, financeiros, químicos e até medicinais, e outros.

A ampla observação de fenômenos complexos na física (astronomia, física de particulas, turbulência), biologia (DNA, conformações de enzimas), mercado financeiro (índices da bolsa de valores), matemática (fractais), computação (percolação, autômatos celulares) etc., sugere um momento de observação do cenário histórico de

modificação da física matemática para um campo mais abrangente que é a ciência dos sistemas não lineares. Tal é a importância destes fenômenos que os novos métodos de tratamento de sistemas complexos passam a ter estrutura cientifica própria e formalismo especial, caso da mecânica estatística não extensiva. Embora os sistemas complexos apresentem para diversas propriedades comportamentos simples, nem todo tratamento matemático esta bem estabelecido e existem alguns pontos em desenvolvimento.

A Mecânica Estatística não Extensiva, neste cenário do final do século XX e início do século XIX atua de forma interdisciplinar na sua aplicação e concepção. O surgimento desta área ocorreu com a publicação do artigo intitulado *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*, por Tsallis em 1988 (TSALLIS, 1988), com a definição da entropia

$$S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1}, \tag{1.1}$$

onde W é o número de microestados e p_i é a probabilidade do microestado i; k é a constante que confere consistência dimensional, a constante de Boltzmann. O limite $q \to 1$ a reduz à forma da entropia de Boltzmann-Gibbs,

$$S = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i. \tag{1.2}$$

Vinte anos após a proposta da generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, Tsallis publica um livro (TSALLIS, 2009) com os principais resultados obtidos desta nova formulação nas mais diversas áreas. Neste livro, o autor propõe no prefácio alguns questionamentos e explicações a respeito das generalizações e a negligência de alguns axiomas importantes em Mecânica Estatística, Termodinâmica e Dinâmica de sistemas caóticos, áreas correlatas desta nova vertente.

A entropia de Tsallis, equação 1.1, para um sistema composto por duas partes independentes A e B, no qual probabilidade do estado ij do sistema composto é dada pelo produto das probabilidades de cada subconjunto, $P_{ij}^{A+B} = P_i^A P_j^B$, é dada por

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{(1-q)}{k} S_q(A) S_q(B) \tag{1.3}$$

Esta expressão mostra que a entropia S_q é não-aditiva. Inicialmente a entropia S_q foi denominada, erroneamente, de entropia não-extensiva. Entretanto extensividade

e aditividade são propriedades distintas. A aditividade é relacionada à entropia de um sistema composto por subsistemas independentes. A entropia de Boltzmann-Gibbs é aditiva, $S(A+B) = S(A) + S(B)$, e a entropia S_q é não-aditiva. Já a extensividade se aplica quando a propriedade é proporcional ao tamanho do sistema N. Em sistemas com correlações fracas, a entropia de Boltzmann-Gibbs é extensiva, enquanto a entropia S_q é não-extensiva. Nestes sistemas, os conceitos de aditividade e extensividade são coincidentes. Para sistemas com correlações fortes (mais particularmente, uma classe específica de correlações fortes), a entropia de Boltzmann-Gibbs pode se tornar não-extensiva, e pode haver um valor especial do índice q, frequentemente denominado q_{ent} (ent de entropia), que torna a entropia $S_{q_{ent}}$ proporcional a N, portanto extensiva. A confusão entre esses conceitos levou, nos anos iniciais, à denominação de S_q como entropia não-extensiva, mas a denominação adequada é entropia não-aditiva. A expressão não-extensiva continua sendo utilizada, e válida, para a mecânica estatística, pois a energia (e não a entropia) é não-extensiva, para sistemas com interações de longo alcance. Usa-se, portanto as denominações mecânica estatística não-extensiva, e entropia não-aditiva. A distinção entre estes conceitos está esclarecida no livro (TSALLIS, 2009).

Recentemente Tsallis (TSALLIS, 2011) discutiu alguns pontos abertos na mecânica estatística não extensiva. Neste artigo, ele apresenta as conexões entre os tratamentos da fisica-matemática para sistemas simples, esclarecendo os desenvolvimento das conexões entre os tratamento de sistemas micróscopicos, mesoscópicos e macroscópicos. Além disso, deixa claro a limitação deste formalismo e estabelece suas conexões com a mecânica, com a teoria de probabilidades, e com a termodinâmica. Ainda neste artigo, o autor mostra que o surgimento de entropias generalizadas e consequentemente a generalização da mecânica estatística, permite o tratamento de sistemas complexos de forma fundamentada e bela. Destacamos os resultados de tratamento de dados obtidos pelo *Large Hadron Collider* (LHC), reportados por (KHACHATRYAN et al., 2010), no qual são modeladas distribuições de *hadrons* carregados em função do momento transverso. Além deste trabalho existem muitos artigos listados por Tsallis (TSALLIS, 2011) com resultados convincentes sobre a aplicabilidade desta entropia generalizada.

Sistemas que apresentam propriedades não extensivas tem fornecido os elemen-

tos necessários para avaliação das entropias generalizadas. Entre os trabalhos que apresentam os resultados mais importantes para o desenvolvimento de métodos nesta área, está o artigo Tsallis, Plastino e Zheng (1997), no qual são exploradas as propriedades como sensibilidade às condições iniciais e a taxa de crescimento da entropia para o mapa logístico. Esta propriedade foi respresentada pela função q-exponencial oriunda do formalismo de Tsallis. Neste sentido são discutidos as questões pertinentes a identidade de Pesin que é apresentada com detalhes no capitulo 3. Deste trabalho surgiram outros artigos fundamentais para discussão da validade desta igualdade através de outros métodos, por exemplo, Latora e Baranger (1999), Latora et al. (2000) .

O objeto central desta dissertação é a análise de uma deformação do mapa logístico, utilizando o q-produto, no limiar do caos, e suas possíveis conexões com a mecânica estatística não extensiva. Nas seções a seguir são apresentadas as principais propriedades a respeito deste sistema. Entre elas serão indicadas a definição de mapa, conjugação topológica, densidade natural invariante etc.

1.1 Distribuições não-extensivas

A Termodinâmica explica fenômenos de sistemas constituídos por muitos elementos do ponto de vista macroscópico, enquanto que a Mecânica Estatística o faz pelo viés microscópico. De forma simplificada, os esforços da Termodinâmica comprimem toda a informação de um volume de controle observado em propriedades macroscópicas como temperatura, pressão, massa específica, entropia etc. Este tipo de avaliação permite que o sistema seja caracterizado através do sistema de medição independentemente do comportamento das partículas que o constituem. Explicar o comportamento deste volume de controle através das partículas que o constituem é papel da Mecânica. Entretanto, nesta tarefa, a Mecânica enfrenta uma de suas maiores dificuldades, o elevado número de equações devido ao grande número de partículas e por consequência o grande número de condições iniciais desconhecidas (Callen, 1985), (NUSSENZVEIG, 1999). Resolver este conjunto de equações torna-se, portanto, inviável. Assim, a abordagem estatística torna-se indispensá-

vel. Vamos desenvolver duas distribuições de probabilidade oriundas do formalismo não-extensivo.

A entropia S_q, equacao 1.1, sujeita ao vínculo da normalização

$$\sum_{i}^{W} P_i = 1, \tag{1.4}$$

e ao valor médio da energia, na forma

$$\bar{E}_q = \sum_{i=1}^{W} P_i^q E_i \tag{1.5}$$

sendo E_i a energia do microestado i, origina a seguinte expressão para a probabilidade:

$$P(E_i) = A_q \exp_q(-\beta E_i), \tag{1.6}$$

onde A_q é um fator de normalização (veja Apêndice A.3) , e a funcao q-exponencial é definida por

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, q \in \Re). \tag{1.7}$$

O subscrito + simboliza $[A]_+ \equiv \max(A, 0)$, sendo uma forma abreviada para representar uma restrição da função q-exponencial. Esta restrição impede a ocorrência de números complexos, permitindo sua interpretação como probabilidade. A função q-exponencial tem como inversa a função q-logaritmo:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (x > 0), \tag{1.8}$$

i.e., $\ln_q(\exp_q x) = \exp_q(\ln_q x) = x$. O limite $q \to 1$ recupera as funções tradicionais.

Consideremos um sistema aberto submetido a um processo de difusão. A entropia S_q pode ser escrita em foram contínua da seguinte maneira (TSALLIS et al., 1995b), (PRATO; TSALLIS, 1999)

$$S_q[p(x)] = k\frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma}[\sigma p(x)]^q}{q-1}. \tag{1.9}$$

Submetendo essa entropia ao processo de maximização de Lagrange, sujeita aos vínculos (vide Apêncice A.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \tag{1.10}$$

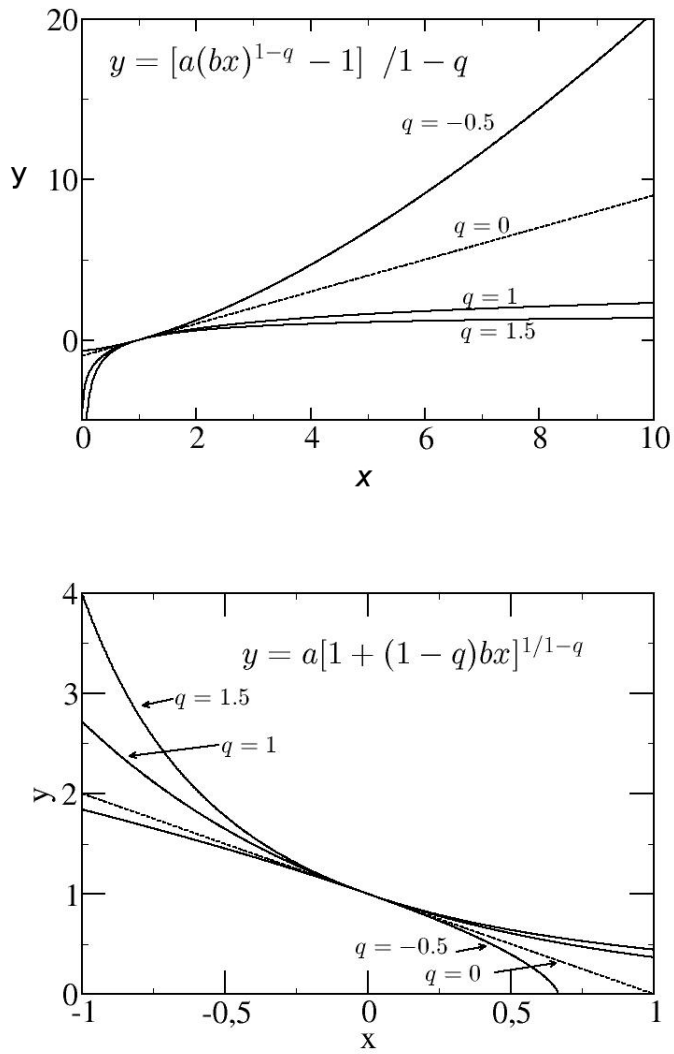

Figura 1.1: Gráficos da função q-exponecial e q-logaritimo para diferentes valores de q. A mudança da concavidade para estas funções acontece em $q = 0$. Os parâmetros a e b utilizados para gerar estas figuras não são iguais.

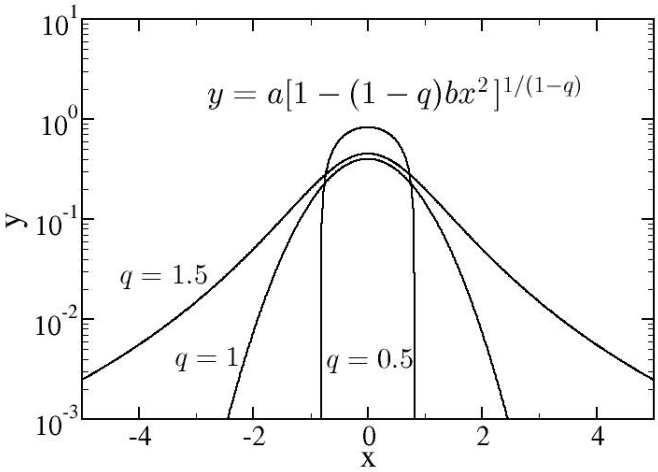

Figura 1.2: Gráficos da função q-gaussiana (TSALLIS et al., 1995b) para diferentes valores de q.

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} x^2 [\sigma p(x)]^q = \sigma^2 \tag{1.11}$$

obtém-se a chamada função q-gaussiana:

$$p(x) = A_q \exp_q \left(-\beta x^2\right) \tag{1.12}$$

onde a expressão para a constante de normalização A_q, varia de acordo com o caso $q < 1$ ou $1 < q < 3$ (veja Apêndice A.4). A função q-gaussiana não é normalizável para $q \geq 3$. A figura 1.2 apresenta três casos da q-gaussiana.

1.2 Operações algébricas generalizadas

As funções q-exponencial e q-logaritmo satisfazem às seguintes propriedades:

$$\exp_q(x) \exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1-q)xy), \tag{1.13}$$

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln x \ln y. \tag{1.14}$$

Essas propriedades serviram como inspiração para o desenvolvimento de uma algebra generalizada (NIVANEN; MÉHAUTÉ; WANG, 2003; BORGES, 2004a). A q-soma

entre dois números x e y é definida por

$$x \oplus_q y = x + y + (1-q)xy, \tag{1.15}$$

e o q-produto entre dois números reais x e y vem definido por

$$x \otimes_q y \equiv \text{sign}(x)\text{sign}(y) \left[|x|^{1-q} + |y|^{1-q} - 1\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{1.16}$$

onde $[A]_+ \equiv \max\{0, A\}$. O limite $q \to 1$ recupera as operações usuais ($x \oplus_1 y = x+y$, $x \otimes_1 y = xy$). A definicao original, como em (NIVANEN; MÉHAUTÉ; WANG, 2003; BORGES, 2004a), era mais simples, restrita a valores reais positivos das variáveis x e y. A equação 1.16 não apresenta esta restrição, e foi apresentada em (TSALLIS, 2009). Particularmente o q-produto exerce um papel central na generalização do mapa logístico, que tratamos nesta dissertação. Com essas definições, as equações 1.13 e 1.14 ficam reescritas de forma mais conveniente,

$$\exp_q(x) \exp_q(y) = \exp_q(x \oplus_q y), \tag{1.17}$$

$$\ln_q(xy) = \ln_q x \oplus_q \ln_q y, \tag{1.18}$$

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y), \tag{1.19}$$

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y, \tag{1.20}$$

A definição de soma usual possui a propriedade de comutatividade e a sua forma generalizada q-soma 1.21 mantém esta propriedade.

$$x \oplus_q y = y \oplus_q x \tag{1.21}$$

Nesta algebra também é verificada a existência da propriedade associatividade para a operação q-soma 1.22.

$$x \oplus_q (y \oplus_q z) = (x \oplus_q y) \oplus_q z \tag{1.22}$$

Embora sejam mantidas as propriedades de comutatividade e associatividade para a operação q-soma, a distributividade é perdida ao generalizar esta operção, logo trata-se de uma algebra não distributiva como explicado em (BORGES, 2004b).

$$a(x \oplus_q y) \neq (ax \oplus_q ay). \tag{1.23}$$

Outra propriedade que permanece sem alteração para a q-soma é o elemento neutro,

$$x \oplus_q 0 = 0 \oplus_q x = x. \tag{1.24}$$

Definido o elemento neutro pode-se utilizá-lo para a definição do oposto e por consequência a operação de subtração 1.2 como segue;

$$x \oplus_q (\ominus x) = 0 \tag{1.25}$$

$$\ominus_q \equiv \frac{-x}{1+(1-q)x}, \qquad (x \neq \frac{1}{q-1}).$$

O uso da q-algebra tem tido diversos usos em aspectos teóricos do formalismo não-extensivo, veja, por exemplo, as referências (BORGES, 2004a; ARRUDA et al., 2008; JAGANATHAN; SINHA, 2005; TSALLIS; QUEIROS, 2007; PENNINI; PLASTINO; FERRI, 2008; SCARFONE; SUYARI; WADA, 2009; SUYARI, 2006; SILVA; ANSELMO; ALCANIZ, 2009; SUYARI; TSUKADA, 2005; UMAROV; TSALLIS; STEINBERG, 2008). Mais detalhes da q-algebra, com representações gráficas, são apresentados por Tsallis em (TSALLIS, 2009).

1.2.1 Lei dos erros de Gauss e sua generalização

A lei dos erros de Gauss frequentemente utilizada pela ciência como hipótese para a realização de medições, pode ser representada pela função densidade de probabilidade como segue:

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{e^2}{2\sigma^2}. \tag{1.26}$$

A equação 1.26 é referenciada na literatura como distribuição Gaussiana. A síntese do resultado da lei de Gauss através de uma única equação pode ser realizada através de dois caminhos ao menos, pelo método da maximização da entropia e o principío da máxima verossimilhança. Estes métodos foram explicados detalhadamente em (SUYARI; TSUKADA, 2005).

Dado um conjunto de informações de tamanho n,

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

sabe-se que $x_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ é um valor de variável aleatória $X_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ independente e indenticamente distribuídas. O valor de x_i é definido como resultado da observação do valor verdadeiro x adicionado de valor de erro e_i. Assim, para cada variável aleatória X_i será atribuída uma variável aletória E_i, logo temos a seguinte representação, $X_i = x + E_i(i = 1, 2, \ldots, n)$. Segundo a hipótese de indepêndencia das variáveis aleatórias, a proposta de função de verossimilhança é dada pela equação 1.27

$$L(\theta) = f(x_1 - \theta)f(x_2 - \theta)\ldots f(x_n - \theta). \tag{1.27}$$

A definição da função de verossimilhança é fortemente ligada à função de densidade de probabilidade condicional (porém não mantém as mesmas propriedades de uma função densidade de probabilidade, por exemplo a sua integral é diferente de 1), por isso para um conjunto de observações independentes tem a forma apresentada na equação 1.27. Entretanto, devemos salientar a seguinte característica que a diferencia de uma densidade de probabilidade, na perspectiva de uma função de verossimilhança, as observações são fixas, enquanto que seus parâmetros são desconhecidos e tem comportamento aleatório. A inserção do q-produto na fução de de verossimilhança torna a equação 1.27 um caso particular da equação 1.28 para $q = 1$. A maximização da equação 1.28para o parâmetro θ conduz à equação da q-gaussiana (1.33). A utilização do q-produto em princípio não necessariamente deve resultar na q-gaussiana, entretanto, como obtido pelo método da maximização da entropia, este resultado reforça a proposição de generalização da gaussiana realizada por Tsallis et al. (1995a). Vejamos a seguir a proposta de dedução de Suyari para a representação de função de verossimilhança 1.28 introduzindo o q-produto:

$$L(\theta) = f(x_1 - \theta) \otimes_q f(x_2 - \theta) \otimes_q \ldots \otimes_q f(x_n - \theta). \tag{1.28}$$

Para facilitar a avaliação do máximo das funções 1.27 e 1.28, aplica-se logaritmo natural e q-logaritmo (ver equação 1.8), respectivamente. Para a função 1.28 é útil

a aplicação da seguinte propriedade para o q-produto de dois elementos;

$$\log_q(x \otimes_q y) = \log_q(x) + \log_q(y), \tag{1.29}$$

logo obtemos,

$$\log_q(L(\theta)) = \log_q(f(x_1 - \theta)) + \log_q(f(x_2 - \theta)) + \ldots + \log_q(f(x_n - \theta)) \tag{1.30}$$

que para o caso de $q = 1$ recupera a forma usual da função de verossimilhaça (equação 1.27) como explicado em (SUYARI; TSUKADA, 2005). A derivada da função de verossimilhança 1.28 tem um resultado especial que pode ser conseguido pela aplicação da propriedade da derivada de uma função q-logarítimo 1.8

$$\frac{d\log_q(y(x))}{dx} = \frac{y^{'}(x)}{y^q(x)} \tag{1.31}$$

fornece o valor de θ para $q = 1$ como conhecido para aplicações em sistemas simples(ver equação 1.32).

$$\frac{L^{'}(\theta)}{L(\theta)} = \sum_i^n \frac{f(\theta - x_i)}{f'(\theta - x_i)} \tag{1.32}$$

Deste resultado avançamos para a seguinte equação:

$$f(e) = \frac{\exp_q(-\beta_q e^2)}{\int \exp_q(-\beta_q e^2) de} \tag{1.33}$$

A evolução do método da maxima verossimilhança através do cálculo da sua derivada conduz aos seguintes resultados para as funções simples e generalizada (equações 1.27 e 1.28, respectivamente).

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade e algebra generalizada

2.1 Dinâmica

Sistemas dinâmicos podem ser classificados segundo o comportamento da sua energia ao longo da trajetória. Se o sistema mantém a energia constante é chamado de conservativo, caso contrário, é chamado de dissipativo. A definição dada pela física para estas propriedades esta associada aos sistemas hamiltonianos, ou seja, sistemas da física clássica descritos pelo formalismo hamiltoniano; sistemas conservativos não apresentam perda de energia para o meio, enquanto que sistemas dissipativos perdem energia com a ação do atrito, por exemplo.

O conjunto de estados acessíveis a um sistema dinâmico é genericamente denominado por espaço de fases (tipicamente um espaço multidimensional; a cada grau de liberdade corresponde um eixo para posição e outro para o momento). Num sistema dinâmico conservativo, o volume do espaço de fases é mantido constante e isto é verificado através do valor do determinante da matriz jacobiana, que vale 1. Sistemas dissipativos tem este determinante diferente de 1. O critério que define se

o sistema é conservativo é apresentado a seguir:

$$\det Jf(x_{i+1}) = 1. \tag{2.1}$$

Como exemplo de sistemas conservativos podemos citar o mapa padrão de Chirikov 2.2. Trata-se da solução discreta do sistema de equações diferenciais do problema *kicked rotor*. De forma direta é verificado que o critério da equação 2.1 é atendido.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t + \tfrac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_t) + x_t \pmod 1 \\ y_{t+1} &= y_t + \tfrac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_t) \pmod 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Quanto aos sistemas dissipativos apresentamos o mapa logístico eq. 2.3 conhecido pelo artigo (MAY, 1976). Este mapa serve de base para a investigação das propriedades do limiar do caos nesta dissertação,

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), \tag{2.3}$$

onde n faz o papel do tempo, de forma discreta, $0 < y_n < 1$, e o parâmetro de controle $0 < r \leq 4$. Existem exemplos de mapas que podem ser conservativos ou dissipativos, a depender do valor do parâmetro de controle, por exemplo, o mapa de Hénon.

Nas seções a seguir são apresentadas duas propostas de deformação de mapas com intuito de investigar as implicações de um tipo deformação de funções trigonométricas generalizadas sobre sistemas conservativos e uma deformação algébrica sobre um sistema dissipativo.

2.2 Sistema conservativos de baixa dimensionalidade

Borges (1998) introduz funções trigonométricas e hiperbólicas generalizadas com base na função q-exponencial, equação 1.7. Particularmente, a expressão de Moivre fica generalizada na forma

$$\exp_q(\pm i\theta) = \cos_q\theta \pm i\,\mathrm{sen}_q\,\theta \tag{2.4}$$

As funções q-cosseno e q-seno podem ser reescritas na forma

$$\cos_q \theta = \rho_q(\theta) \cos_1[\varphi_q(\theta)], \tag{2.5}$$

$$\operatorname{sen}_q \theta = \rho_q(\theta) \operatorname{sen}_1 [\varphi_q(\theta)], \tag{2.6}$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_q^2(\theta) &= \exp_q[(1-q)\theta^2] \\ &= [1+(1-q)^2\theta^2]^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

e

$$\varphi_q(\theta) = \frac{\arctan_1[(1-q)\theta]}{1-q}. \tag{2.8}$$

A função seno generalizada, eq. 2.6, pode ser aplicada para uma generalização do mapa padrão, eq. 2.2, que é conservativo $\forall q$.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t + \tfrac{K}{2\pi} \operatorname{sen}_{q_m} (2\pi x_t) + x_t \quad (mod 1) \\ y_{t+1} &= y_t + \tfrac{K}{2\pi} \operatorname{sen}_{q_m} (2\pi x_t) \quad (mod 1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3 Sistemas dissipativos de baixa dimensionalidade

2.3.1 Mapa logístico

A investigação de sistemas dinâmicos surgiu em função do estudo do comportamento de populações. A proposição de Malthus estabelecia que a população humana cresce geometricamente, representada pela equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = mp,$$

foi alvo de críticas por Verhulst (VERHULST, 1838), que passou a considerar limitações quanto a produção de alimento. Ele acrescentou mais um termo à equação diferencial, que constitui uma parcela de decréscimo da taxa de crescimento populacional na forma de uma função genérica $\varphi(p)$,

$$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p).$$

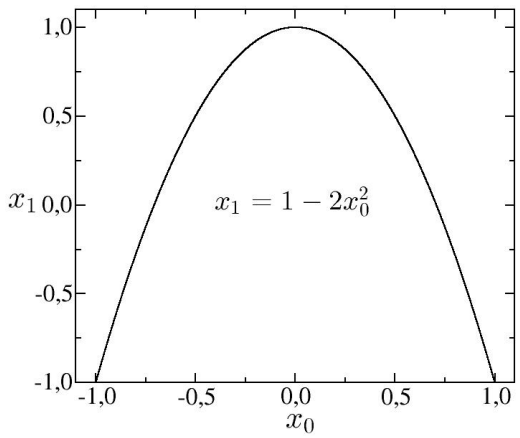

Figura 2.1: x_1 em função de x_0 para o mapa logístico (Eq. (2.10) com $\mu = 2$). Esta função tem comportamento parabólico.

A forma discreta desta equação foi apresentada por (MAY, 1976) (ver equação 2.3). Neste artigo, May explora diversas propriedades de sistemas dinâmicos não lineares (mapas[1]). Entre as propriedades investigadas por May, estão os pontos fixos, ciclos limite e caos.

A equação 2.3 pode ser reescrita de forma equivalente, e ocasionalmente mais conveniente,

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2, \tag{2.10}$$

com $-1 < x_n < 1$ e $0 < \mu \leq 2$. A equação 2.10 do mapa logístico é uma relação recursiva, ou seja a variável de estado x está relacionada com o período anterior de forma que o estado x_{n+1} depende do estado x_n. Por ser unidimensional, não-linear, e apresentar uma riqueza de comportamentos, o mapa logístico é amplamente estudado em sistemas dinâmicos. O diagrama 2.1 mostra a função $f(x) = 1 - \mu x_n^2$, que representa uma iterada do mapa. A relação recursiva de três iteradas do mapa logístico é dada por

$$x_1 = 1 - 2x_0^2 \tag{2.11}$$

$$x_2 = 1 - 2(1 - 2x_0^2)^2 \tag{2.12}$$

[1]Mapas são sistemas dinâmicos discretos nos quais a relação de recorrência descreve a trajetória de um determinado estado.

$$x_3 = 1 - 2(1 - 2(1 - 2x_0^2)^2)^2 \tag{2.13}$$

A equivalência entre as equações 2.3 e 2.10 é mostrada por um método chamado conjugação topológica (BECK; SCHöGL, 1995). Dois mapas $f(x)$ e $g(y)$ são chamados de topologicamente conjugados se eles podem ser transformados um no outro pela referência de uma chamada função de conjugação ϕ. Ela apenas produz as coordenadas x como uma função de y

$$x = \phi(y).$$

Leva-nos a assumir que uma única inversa $\phi^{-1}(x)$ existe. Se o mapa

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

é transformado no mapa topologicamente conjugado

$$y_{n+1} = g(y_n),$$

a seguinte relação é satisfeita:

$$x_{n+1} = \phi(y_{n+1}) = f(\phi(y_n)).$$

Isto significa

$$\phi(g(y)) = f(\phi(y)) \tag{2.14}$$

ou

$$g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi,$$

onde $\circ$ denota a composição de duas funções:$f \circ \phi(y) = f(\phi(y))$. Geralmente esta forma é conhecida como mapa logístico enquanto a forma da equação 2.10 não é referenciada diretamente por este nome. Entretanto a diferença entre estas equações esta na escolha das coordenadas. Determinaremos portanto uma função de conjugação. A função do mapa (equação 2.10) é dada por

$$f(x) = 1 - \mu x^2$$

e a função do mapa logístico (equação 2.3) é dada por

$$g(y) = ry(1 - y).$$

Para relacionar estas duas funções é feito um *ansatz*

$$\phi(y) = ay + b$$

e inserindo na equação 2.14 e comparando os termos de mesma potência de y, obtemos o resultado

$$\phi(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu}[(1+4\mu)^{1/2} + 1] \tag{2.15}$$

e

$$r = (1+4\mu)^{1/2} + 1. \tag{2.16}$$

O mapa da cabana (*tent map*, em inglês) que também é analisado como um dos limites de um mapa generalizado pode ser representado por mais de um sistema de coordenadas, ou seja, tem pelo menos duas formas equivalente deste mapa. O mapa da cabana originalmente conhecido como:

$$y_{n+1} = \mu - 2\mu\left|y_n - \frac{1}{2}\right| \tag{2.17}$$

para y contido no intervalo $[0,1]$ e o parâmeto de controle μ pertecendo ao intervalo $[0,1]$. A outra forma desta equação é dada a seguir:

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| \tag{2.18}$$

onde x pertende ao intervalo $[-1,1]$ e o parâmetro de controle pode ser variado no intervalo $(0,2]$.

As hipóteses e considerações realizadas para o mapa da cabana são idênticas às do mapa logístico, entretanto a equação de conjugação resultante é diferente, vejamos a seguir:

$$\phi(t) = \frac{1+2\mu}{\mu}y - \frac{\mu}{2} \tag{2.19}$$

Um caso particular do mapa logístico, $\mu = 2$ para a equação 2.10, é o mapa de Ulam. Entre as características mais interessantes deste mapa esta a sua conjugação com o mapa da cabana equação 2.17. Além disso não há dificuldade na obtenção da densidade natural destes sistemas. A função de conjugação para este sistema é a mesma relação apresentada pela equação 2.14 que é

$$x = \phi(g(y)) = -\cos(\pi y). \tag{2.20}$$

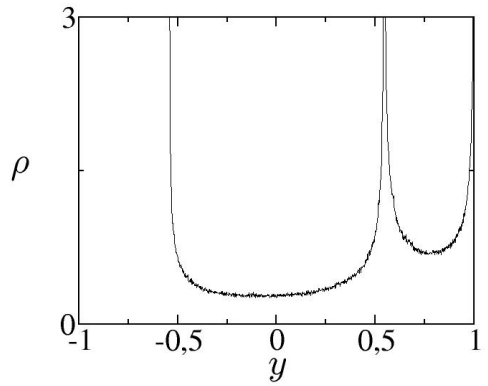

Figura 2.2: Histograma do mapa logístico para o ponto Misiurewic

Substituindo a equação 2.20 na equação 2.10 demonstramos a relação 2.14:

$$-\cos(\pi g(y)) = 1 - 2\cos^2(\pi y) = -\cos(2\pi y). \tag{2.21}$$

A conjugação entre o mapa da cabana e o mapa de Ulam nos permite avaliar a densidade natural deste sistema. Geralmente a densidade natural invariante de um mapa $\rho_x(x)$ é conectada com a densidade $\rho_y(y)$ correspondente de um mapa $g(y)$ conjugado através da relação:

$$\rho_y(y) = \rho_x(x)|\det D\phi(y)| \tag{2.22}$$

$(x = \phi(y))$ fornece ϕ e é unicamente invetível. Aqui $\det D\phi(y)$ denota o determinante da matriz de Jacobi de $\phi(y)$. No caso unidmensional o $\det D\phi(y)$ é simplismente $d\phi/dy$. Expressando assim a conservação da probabilidade.

Exemplos desses mapas aparecem não apenas na dinâmica de populações, mas na modelagem de fluidos, equações diferenciais algébricas de balanço material em reatores, controle de sistemas dinâmicos(sistemas de retroalimentação) e etc. Mapas não lineares de baixa dimensionalidade representam modelos paradigmáticos na análise de sistemas dinâmicos. A evolução discreta do tempo e o número relativamente pequeno de equações simples torna seu tratamento fácil, sem perder a riqueza de comportamento, exibindo ordem, caos e uma bem definida transição entre eles.

O estudo do problema de três corpos em mecânica clássica realizado por Poincaré, levou à importante observação de caos num sistema determinístico. Anterior

ao trabalho de Poincaré era previsto que apenas sistemas com elevado número de elementos poderia manifestar a imprevisibilidade do comportamento, esta abordagem é oriunda da mecânica estatística. Pelas mãos de Poincaré, o século XIX foi promissor no desenvolvimento da matemática destes sistemas, entretanto a variedade de propriedades destes sistemas só pode ser verificada com ajuda de computadores (segunda metade do século XX).

Sistemas caóticos são de especial interesse para a mecânica estatística, já que apresentam as bem conhecidas características: sensibilidade exponencial às condições iniciais, relaxação exponencial para o estado de equilíbrio, distribuições gaussianas. Estas propriedades, presentes no mapa logístico, possibilitaram diversos trabalhos em mecânica estatística não extensiva (TSALLIS; PLASTINO; ZHENG, 1997; MOURA; TIRNAKLI; LYRA, 2000; COSTA et al., 1997; da Silva; da Cruz; Lyra, 1999; TIRNAKLI; TSALLIS, 2006; BECK; SCHöGL, 1995; LATORA et al., 2000). Existe um interesse particular da mecânica estatística não extensiva onde este sistema apresenta outras propriedades adversas às citadas neste paragáfo, como quebra de ergodicidade e distribuição não gaussianas estas propriedades são manifestadas no limiar do caos ou caos fraco. Tais propriedades serão exploradas nos capítulos 3,4 e 5 após a definição do mapa logístico generalizado através da algebra inspirada na equação 2.23 da entropia Boltzmann-Gibbs generalizada por Tsallis (1988).

$$S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} \tag{2.23}$$

2.3.2 Mapas logísticos deformados

Entre as versões deformadas do mapa logístico esta o mapa z-logístico ($x_{n+1} = 1 - a|x_n|^z$, $z > 1$, $0 < a \leq 2$) que foi analisado sob a perspectiva pela Mecânica Estatística não Extensiva para determinação de propriedades no limiar do caos (COSTA et al., 1997; BORGES et al., 2002; da Silva; da Cruz; Lyra, 1999; TIRNAKLI; TSALLIS, 2006), trata-se de uma generalização do mapa logístico para uma potência geral $z > 1$. Anterior às estas análises, foi através da versão geral do mapa z-logístico que Feigenbaumn determinou as constantes universais para esta

classe de mapas. Mais detalhadamente Feigenbaumn investiga o caso particular de $z = 2$ (mapa logístico), neste artigo ainda é citado o trabalho de R. H. May de 1976, já discutido nas seções anteriores. Para este mapa, Feigenbaumn determinou as constantes universais já conhecidas na área de sistemas dinâmicos α e δ.

Aqui, nesta dissertação, é apresentado uma nova classe de mapas unimodais, que também generalizam o mapa logístico, porém através da algebra e não pela potência, como é o caso do mapa z-logístico. No artigo (PESSOA; BORGES, 2011) introduzimos o q-produto[2] 1.16 no termo quadrático x_i^2 do mapa logístico. Para esta generalização adotamos a igualdade dos fatores x e y do q-produto, para manter a propriedade de unidimensionalidade, um dos elementos que fazem o mapa logístico paradigmático no estudo de caos. Foi dado a este mapa o nome de de q-logístico eq. 2.24,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a\left(x_n \otimes_{q_{map}} x_n\right) \\ &= 1 - a[2|x|_n^{1-q_{map}} - 1]_+^{\frac{1}{1-q_{map}}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

$(-1 \leq x_n \leq 1,\ 0 < a \leq 2)$.

É utilizado o índice q_{map} para diferenciá-lo de outros índices q; um deles já nos referimos no capítulo 1, o q_{ent} utilizado para a entropia $S_{q_{ent}}$. O mapa q-logístico recupera o mapa logístico para $q_{map} = 1$, e também o mapa da cabana para $q_{map} \to +\infty$ (o mapa da cabana apropriadamente mudado como $x_{n+1} = 1 - a|x_n|$). Para o limite $q_{map} \to -\infty$ o mapa é definido como $x_{n+1} = 1 - a$ se $|x| = 1$ e $x_n = \pm 1$ se $|x| < 1$. Estes limites são provados no apêndice A. A figura 2.3.2 apresenta uma iteração do mapa.

A figura 2.3.2 apresenta uma iterada do q-logístico para diferentes valores de q_{map}. A função que representa este mapa apresenta uma descontinuidade devido a característica da base $[2|x|_n^{1-q_{map}} - 1]_+$ que pode ser representada pela função a seguir:

$$|x|_n > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-q_{map}}}, \tag{2.25}$$

fazendo q_{map} sair de 1 para $-\infty$ ($q_{map} < 1$) a condição de corte aumenta a região na qual $x_{n+1} = 1$. Para $q_{map} \to -\infty$, $x_{n>0}$ alterna entre 1 e $1 - a$ para $\forall x_0 \in [-1, 1]$. Para $q_{map} > 1$ o mapa é descontínuo para $x = 0$.

[2]Detalhes sobre o q-produto são apresentados no capítulo 1

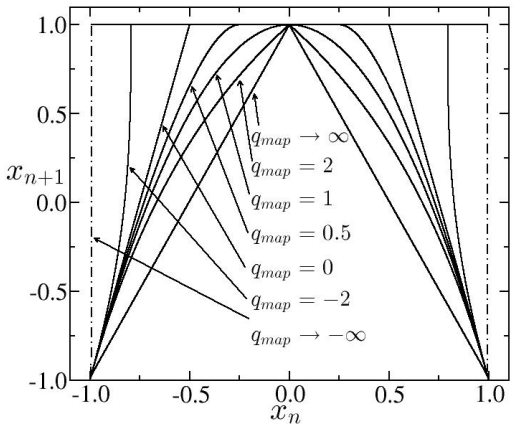

Figura 2.3: Representação de x_{n+1} como uma função de x_n para o mapa q-logístico (ver equação 2.24). São apresentados os casos $q_{map} = 1$, com perfil parabólico, e o mapa da cabana para $q_{map} \to \infty$. A linha descontínua do gráfico mostra os casos $q_{map} \to \infty$, para o qual os valores deste sistema serão 1 ou $1 - a$ para $\forall x_n \in [-1, 1]$.

Diagrama de bifurcação para diferentes valores de q_{map} são apresentados na figura Fig. 2.4. Quando q_{map} tende de 1 (mapa logístico usual) para 2 ,

Ainda no contexto da Mecânica Estatística não Extensiva foi realizada por Jaganathan e Sinha (2005) uma outra abordagem para deformação do mapa logístico que utiliza a função q-exponencial 1.7.

A derivada Schwarziana é definada como,

$$SD(f(x)) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \tag{2.26}$$

para o mapa q-logístico (ver Apêndice A.2) é dado por

$$SD(f(x)) = \left(q_{map} - \frac{1}{2}q_{map}^2\right)|x|^{-2}\left(1 - \frac{4}{4 - 4|x|^{q_{map}-1} + |x|^{2(q_{map}-1)}}\right). \tag{2.27}$$

Esta expressão é negativa no intervalo $0 < q_{map} < 2$, e positiva para $q_{map} > 2$ ($SD(f(x)) = 0$ para $q_{map} = 0$ e $q_{map} = 2$). Isto significa que a rota para o caos para $0 < q_{map} < 2$ é por duplicação de período.

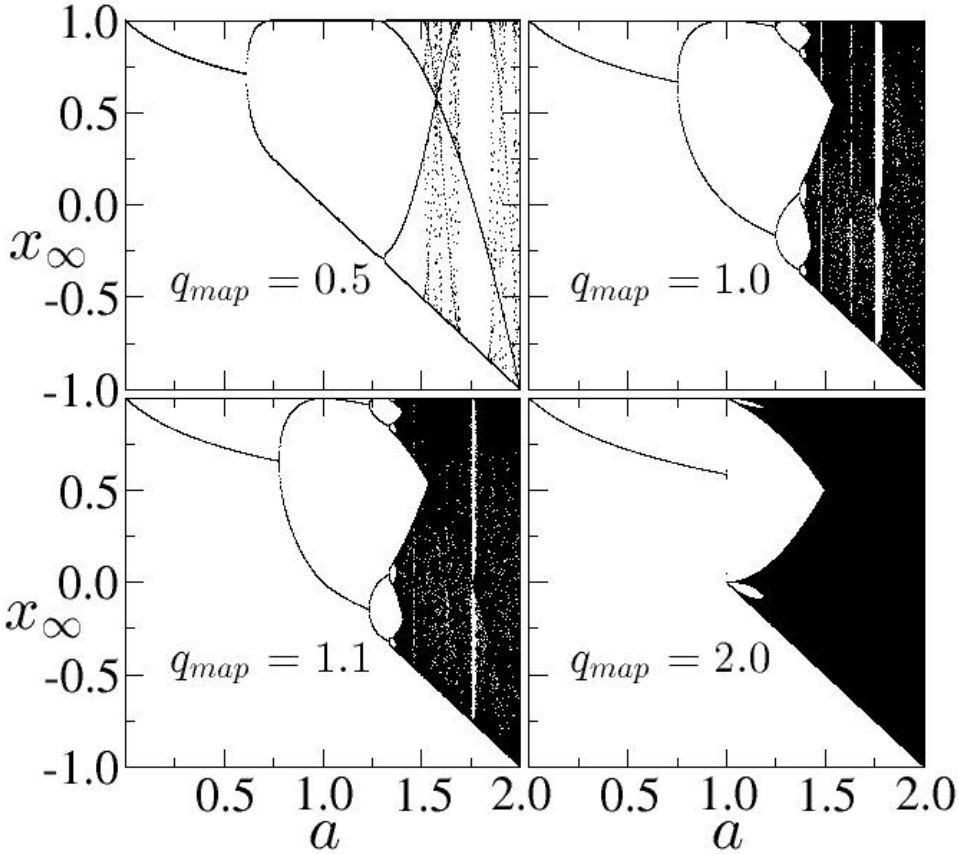

Figura 2.4: Diagrama de bifurcação para diferentes valores de q_{map} (indicados). Janelas de ordem dentro do caos desaparecem com $q_{map} \to 2$. Neste capitulo nós exploramos $q_{map} > 1$ mas $q_{map} = 0.5$ é apresentado como um exemplo agora para dar uma idéia do cenário para $q_{map} < 1$: a região de caos torna-se estreita e a região de ordem torna-se dominante.

Capítulo 3

Sensibilidade às condições iniciais

A sensibilidade às condições iniciais é uma das principais propriedades de sistemas caóticos. Neste capítulo trataremos desta propriedade e sua relação com os parâmetros entrópicos propostos pela mecânica estatística não extensiva. Inicialmente, apresentaremos as propriedades do espectro de Liapunov para toda a faixa de valores do parâmetro de controle do mapa q-logístico, seguida das estimativas de uma propriedade[1] $L(t)$(oriunda do cálculo do expoente de Liapunov), ou seja, uma propriedade que explicará o tipo de evolução dinâmica. Além disso, são calculados para este mesmo sistema os parâmetros q_{ent} através do método da taxa de crescimento de entropia desenvolvido por Latora et al. (2000).

A definição de sensibilidade às condições iniciais esta relacionada ao conceito de distância entre dois estados. Inicialmente, estes dois estados são colocados arbitrariamente próximos e à medida que o sistema evului, ou seja, as duas diferentes rotas são observadas ao longo do tempo, pode ocorrer afastamento ou aproximação em relação aos estados iniciais, e isso define se o sistema é sensível ou insensível, respectivamente, às condições iniciais(TSALLIS; PLASTINO; ZHENG, 1997).

[1]Explicaremos posteriormente a importância desta propriedade para a estimativa do parâmetro q_{sen} que caracteriza a dinâmica da função de sensibilidade às condições iniciais

3.1 Expoente de Liapunov

A caracterização quantitativa da sensibilidade às condições iniciais pode ser realizada através do cálculo do expoente de Liapunov. O expoente de Liapunov mede a distância das rotas de dois estados, a evolução do desvio ao longo do tempo é exponencial por definição. A dedução do expoente de Liapunov descrita detalhadamente por Schuster e Just (2005) é apresentada a seguir. Seja

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^{N+1}(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)| \tag{3.1}$$

onde ε é a distância inicial entre dois estados, N é o tempo discreto (número de iteradas) indicando a evolução do estado inicial $f^0(x_0)$ até o estado $f^N(x_0)$, x_0 é a condição inicial. Reorganizando a equação 3.1 obtemos a seguinte relação:

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{N}\ln\left|\frac{f^{N+1}(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon}\right| \tag{3.2}$$

Para a condição de estados infinitamente próximos, representado pelo limite $\varepsilon \to 0$ aplicado a equação 3.1, e tomandoo limite de $N \to \infty$, obtemos

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{f^{N+1}(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon}\right|$$

logo:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln f^{N'}(x_0). \tag{3.3}$$

O argumento do logaritmo natural $f^{N'}(x_0)$ pode ser explicitado através da aplicação da derivada da n-ésima iterada do mapa f:

$$f^{N'}(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} f^{'}(x_i) \tag{3.4}$$

quando inserimos este resultado na equação 3.3 e aplicando uma propriedade do logaritmo do produto chega-se a

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\prod_{i=0}^{N-1} f^{'}(x_i), \tag{3.5}$$

resultando na equação 3.6 (equação do expoente máximo de Liapunov),

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f^{'}(x_i). \tag{3.6}$$

3.2 Expoente de Liapunov generalizado

O comportamento anômalo em relação as proximidades do limiar do caos geram a necessidade de tratamentos também diferenciados no que diz respeito ao comportamento da evolução dinâmica dos estados de um mapa, por exemplo. Longe do limiar do caos, o sistema apresenta uma dinâmica rápida, e o expoente de Liapunov aponta para duas situações: caos, para $\lambda > 0$, e ordem, para $\lambda < 0$. Exatamente no limiar do caos o expoente de Liapunov torna-se inadequado para descrever a dinâmica do sistema, pois $\lambda = 0$ na equação 3.1 implica que as órbitas inicialmente afastadas por ε permanecerão com esse afastamento fixo ao longo do tempo. Entretanto não é isso o que ocorre. No limiar do caos, o sistema abandona a dinâmica rápida, e passa a ter uma dinâmica lenta. É preciso uma equação mais geral que a 3.1 para representar esses casos. Tsallis propôs a seguinte expressão:

$$\varepsilon e_q^{N\lambda(x_0)} = |f^{N+1}(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| \tag{3.7}$$

Expandindo o termo da esquerda, verifica-se que é possível isolar a variável λ_q pela aplicação da função q-logarítmo:

$$[1 + (1-q)N\lambda_q(x_0)]^{\frac{1}{1-q}} = \left| \frac{f^{N+1}(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| \tag{3.8}$$

Como o q-logaritmo e a q-exponencial são funções inversas uma da outra, obtém-se

$$N\lambda_q(x_0) = \ln_q \left| \frac{f^{N+1}(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| \tag{3.9}$$

Na sequência aplicam-se os limites $\varepsilon \to 0$ e $N \to \infty$ e define-se o λ_q para a região do limiar do caos.

$$\lambda_q(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln_q f'^N(x_0) \tag{3.10}$$

A derivada $f'^N(x_0)$ pode ser calculada analiticamente ou numericamente (AÑAÑOS; TSALLIS, 2004).

Outra abordagem para o expoente de Liapunov generalizado, que não usamos no presente trabalho, pode ser encontrada em Robledo (2006).

A importância da equação eq. 3.10 na representação do limiar do caos esta associada principalmente ao limite $N \to \infty$ para o qual a q-exponencial assume características de uma lei de potência. O valor específico do índice q passa a ser denominado

q_{sen}. A equação 3.7 é uma generalização da equação 3.1, portanto ela vale tanto para situações longe do limiar do caos, quando $q_{sen} = 1$, quanto para próprio o limiar do caos, quando $q_{sen} \neq 1$. Na região de dinâmica rápida, o expoente de Liapunov pode agora ser simbolizado por $\lambda_1 \equiv \lambda$, pois é um caso particular de λ_q, quando $q = 1$. No limiar do caos também são possíveis dois cenários: sistema fracamente caótico, quando $\lambda_{q_{sen}} > 0$, e sistema fracamente ordenado, quando $\lambda_{q_{sen}} < 0$. A região de dinâmica lenta necessita de um parâmetro adicional q_{sen} para sua descrição.

Para um sistema como o mapa logístico (sistema dinâmico discreto), esta característica pode ser definida de forma mais rigorosa. O parâmetro λ, apresentado na equação3.12, é, para o sistema discreto, um expoente de Liapunov. O expoente de Liapunov é uma medida realizada através do cálculo da evolução temporal de N condições iniciais localizadas numa das células das W subdivisões do espaço de fases deste mapa. Vale notar que esta medida não dispensa o cálculo do período transiente. A avaliação deste conjunto de expoentes desde sua condição inicial até a estabilização do valor do expoente de Liapunov é que define a característica do sistema quanto ao seu comportamento à respeito da sensibilidade às condições iniciais. A seguir, apresentamos a equação3.13 do expoente máximo de Liapunov. A caracterização desta propriedade é realizada através do cálculo dos expoentes de Liapunov.

Neste capítulo trataremos de métodos relacionados à dinâmica dos sistemas discretos e suas conexões com a termodinâmica. Os métodos tratados aqui são baseados na evolução das iteradas do sistema do mapa q-logístico para um ensemble microcanônico ou taxa de crescimento da entropia deste mesmo conjunto ao longo do tempo.

A sensibilidade às condições iniciais caracteriza dois estados próximos quanto a sua evolução temporal, seja pela aproximação das suas rotas, seja pelo afastamento. A representação matemática através da equação 3.11

$$\xi(t) = \lim_{\Delta x(0) \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} \tag{3.11}$$

define esta propriedade.

O resultado deste limite (ver equação 3.11) é encontrado com frequência na

literatura como uma lei exponencial. A equação 3.12 da sensibilidade às condições iniciais, como uma lei exponencial com comportamento condicionado ao parâmetro no argumento, indica para valores de $\lambda < 0$, as rotas de duas condições iniciais convergentes e para $\lambda > 0$, as rotas divergentes

$$\xi(t) = \exp \lambda x(t). \tag{3.12}$$

Para órbitas caóticas, com alta dependência às condições iniciais, tem-se caos forte ($\lambda > 0$); Para órbitas periódicas, com baixa dependência às condições iniciais, tem-se sistemas ordenados (órbitas periódicas, $\lambda < 0$).

O máximo expoente de Liapunov pode avaliado para o limiar do caos de acordo com (veja, por exemplo, (BECK; SCHöGL, 1995))

$$\lambda_{max} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \tag{3.13}$$

onde $f'(x)$ é a derivada do mapa q-logistico,

$$f'(x) = -2a|x|^{-q_{map}} \left[2|x|^{1-q_{map}} - 1\right]_+^{\frac{q_{map}}{1-q_{map}}}. \tag{3.14}$$

Para os valores do parâmetro de controle a diferente dos críticos, a sensitividade às condições iniciais é caracterizada por uma divergências expoenencial para a região do caos e decai exponencialmente para a região de ordem, *i.e.*, expoente de Liapunov λ_1 em

$$\xi(t) = \lim_{\Delta x(0)\to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} = e^{\lambda_1 t}. \tag{3.15}$$

Para o limiar do caos foi proposta que a divergência segue assintoticamente uma lei de potência (para ser mais preciso, uma lei q-exponencial) (TSALLIS; PLASTINO; ZHENG, 1997) caracterizando uma dinâmica lenta,

$$\xi(t) = e_{q_{sen}}^{\lambda_{q_{sen}} t} = (1 + (1 - q_{sen})\lambda_{q_{sen}} t)^{\frac{1}{1-q_{sen}}}, \tag{3.16}$$

onde $\Delta x(0)$ representa a distância entre duas condições iniciais vizinhas e *sen* significa sensibilidade às condições iniciais ($q_{sen} \leq 1$). Eq. (3.15) é recuperada para $q_{sen} = 1$ e esta é a razão para o subescrito 1 λ_1, Eq. (3.15).

O artigo Tsallis, Plastino e Zheng (1997) apresenta em detalhes o método de avaliação de mapas segundo as características de um sistema que apresenta ordem,

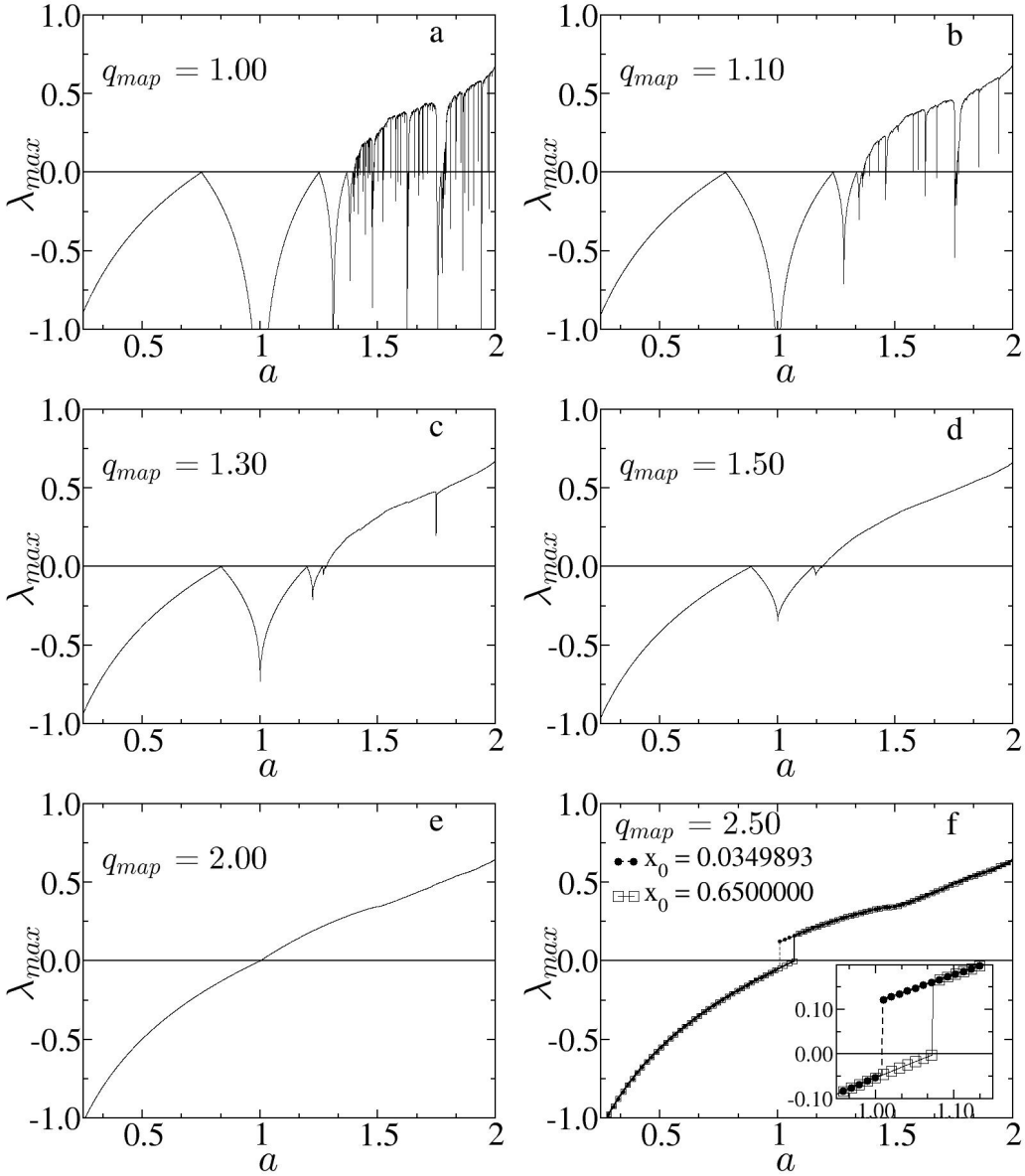

Figura 3.1: Expoente de Liapunov como uma função de do parâmetro de controle para diferentes valores de q_{map} (indicados). Acima do limite usado em Eq. (3.13), a linha quase vertical na Fig. c para $a = 1.7477$ não atravessa o zero, mas apresenta valores negativos se o cálculo é feito com uma boa precisão (foi usado $t = 2^{18}$ e $\Delta a = 2 \times 10^{-4}$). Fig. f exibe coexistência de atratores para duas condições iniciais. Este *inset* é uma ampliação da região de coexistência de atratores para diferentes condições iniciais (indicado com círculos preenchidos e quadrados abertos).

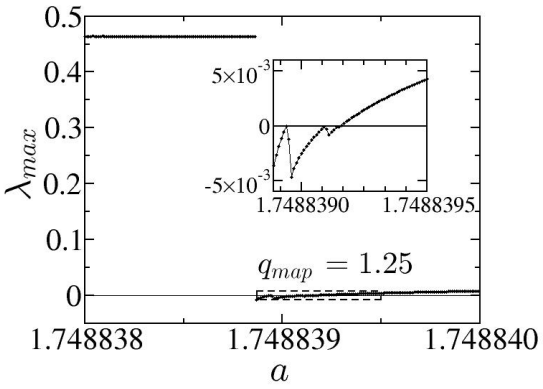

Figura 3.2: Expoente de Liapunov maximo para $q_{map} = 1.25$ para a região da janela mais larga , de ciclo 3, com incremento de $\Delta a = 1.0 \times 10^{-8}$. Foi usado um tempo transiente de $t_{trans} = 2^{23}$ e o tempo usado para estimar o expoente de Liapunov $t_{end} = 2^{23}$ (com intervalo de tempo baixo a transição do expoente de Liapunov de negativo para positivo não pode ser visto). O *inset* coresponde ao retângulo tracejado no painel principal e apresenta pontos de expoente de Liapunov zero que corresponde a bifurcação por duplicação de período.

caos, limiar do caos e nuances como intermitência. A região do limiar do caos e as respectivas regiões da função q-exponencial adequadas para a caracterização do sistema foram detalhadas em Tsallis, Plastino e Zheng (1997) para o caso da evolução das iteradas do mapa logistíco.

Para um sistema com dinâmica lenta, Tsallis, Plastino e Zheng (1997) consideram o comportamento assintótico da equação 3.16, e analisa separadamente os casos fracamente sensível

$$\xi(t) \sim [(1-q)\lambda_q(x_0)t]^{\frac{1}{1-q}} \quad (q < 1, \quad \lambda_q > 0), \tag{3.17}$$

e fracamente insensível

$$\xi(t) \sim \frac{1}{[(q-1)|\lambda_q(x_0)|t]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (q > 1, \quad \lambda_q < 0). \tag{3.18}$$

A sensibilidade pode ser representada graficamente através da variável L (ver Tsallis, Plastino e Zheng (1997))

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \tag{3.19}$$

A figura 3.3 apresenta cinco exemplos de L vs. $\ln N$. Para $q_{map} = 2$ (Fig. 3.3d) a dependência de L sobre N é muito lenta e não podemos ver acima de $N = 2^{15}$ (o limite superior das figuras). Para $q_{map} > 2$ é possível coexistência de atratores de acordo com o parâmetro de controle a: dependendo da condição inicial, L pode ser positivo e crescente ou negativo e decrescente. A Fig 3.3f mostra que existe depedência linear de L sobre N, mas com diferentes inclinações para os caos $L > 0$ e $L < 0$. Para valores de $a > 1.07499\ldots$, $L < 0$ é nunca exibido. Coexistência de atratores foi também encontrados em (JAGANATHAN; SINHA, 2005) para uma diferente deformação do mapa logístico (os autores chamam sua deformação de mapa q-logístico, a mesma denominação que usamos no presente trabalho).

Expoentes de Liapunov são apresentados na Fig. 3.1 apresentando transição entre ordem e caos. As figuras mostram que esta transição torna-se esparsa a medida que q_{map} se afasta de 1, e para $q_{map} = 2$ ocorre apenas uma única transição (caos robusto)(BANERJEE; YORKE; GREBOGI, 1998). A Fig. 3.1f apresenta coexistência de atratores para $q_{map} = 2.5$.

A figura 3.4 ilustra o primeiro ponto de acumulação de duplicação de período a_c como uma função de q_{map}. Para $1 < q_{map} < 2$, o comportamento é ordinário no sentido de $a < a_c$, $L < 0$, e para a ligeiramente maior que a_c, $L > 0$. Para $q_{map} > 2$ um comportamento diferente aparece: ordem é encontrada para $a < 1$ (região abaixo da linha sólida), enquanto caos é encontrado acima da linha tracejada. A região entre estas linhas apresenta comportamento ordenado e caótico, dependendo da condição inicial (veja as figuras 3.3e, 3.3f and 3.1f).

A tabela 3.1 apresenta o intervalo dos pontos críticos a_c (primeiro ponto de acumulação de bifurcação) para diferentes valores de q_{map}. O valor do a_c está entre a_{λ_-} e a_{λ_+}. A quarta coluna apresenta o valor adotado para a_c. Para a obtenção dos valores do parâmetro a_c listados na tabela, o expoentes de Liapunov foram calculados com um tempo transiente de $t_{trans} = 2^{23}$ e o tempo final de $t_{end} = 2^{23}$ (os valores da tabela tem menor incerteza que aqueles da Fig. 3.4). Foi fixada a condição inicial de $x_0 = 0.65$ para todos os caos.

Na Fig. 3.2 apresentamos a janela de ciclo 3 para $q_{map} = 1.25$. Esta janela de ordem dentro do caos (bem como todas as outras) torna-se estreita: para identificar

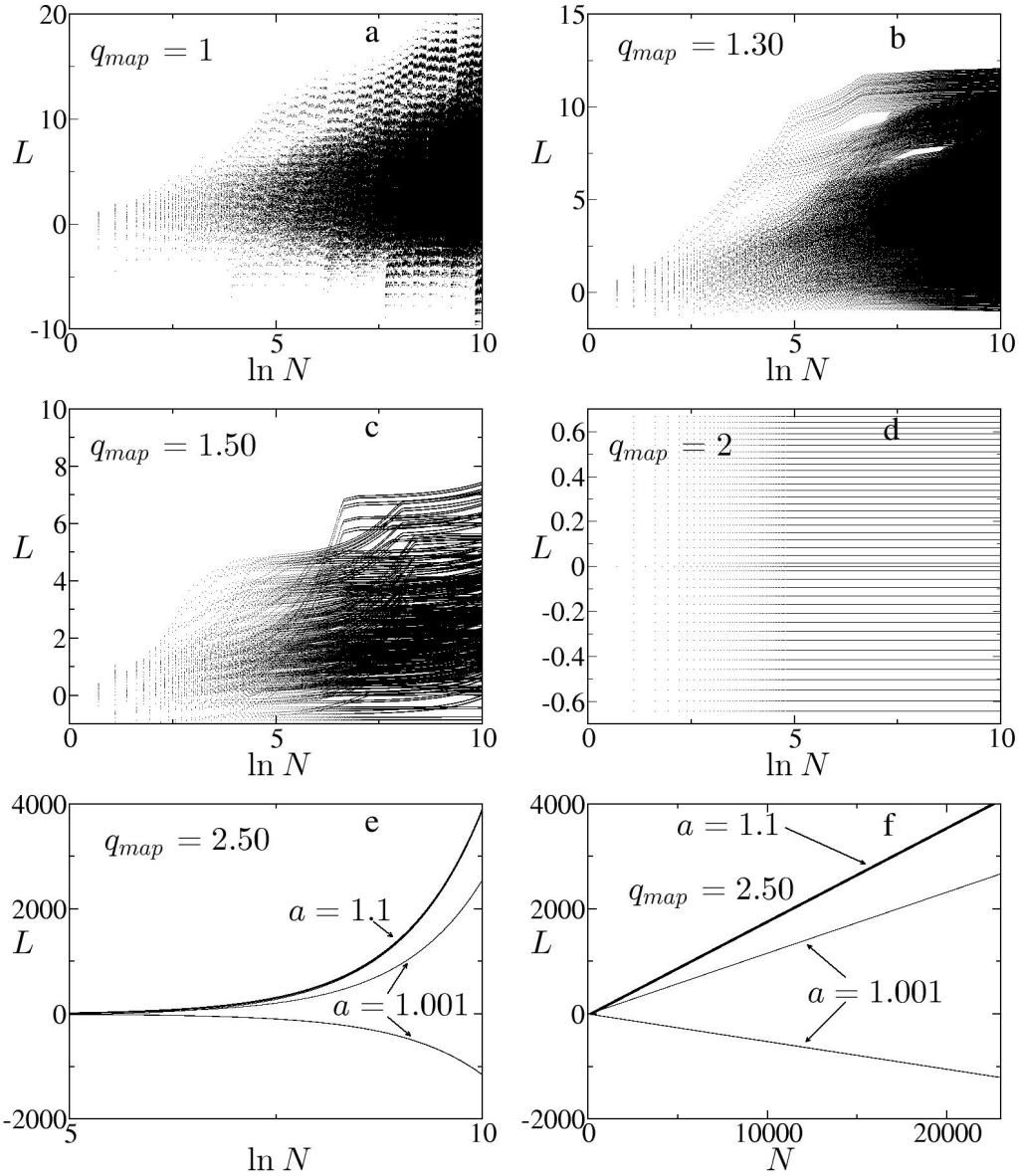

Figura 3.3: Sensibilidade às condições iniciais definida pela variável L (Eq. (3.19)) para diferentes valores de q_{map} (indicados). Foram usadas 40 condições iniciais. Para $q_{map} = 2.5$ (figuras e e f) três valores do parâmetro de controle a foram apresentados. Pode ser visto que é possível coexistência de atratores para um certo conjunto de condições iniciais (para $a = 1.001$, $a = 1.01$), um com $L > 0$ e outro com $L < 0$. O mesmo valor de $q_{map} = 2.5$ e com $a = 1.1$, a condição inicial sempre leva para $L > 0$. Fig. f apresenta dependência linear de L com N Inclinações (em valores absolutos) para $a = 1.001$ para $L > 0$ e $L < 0$ diferem.

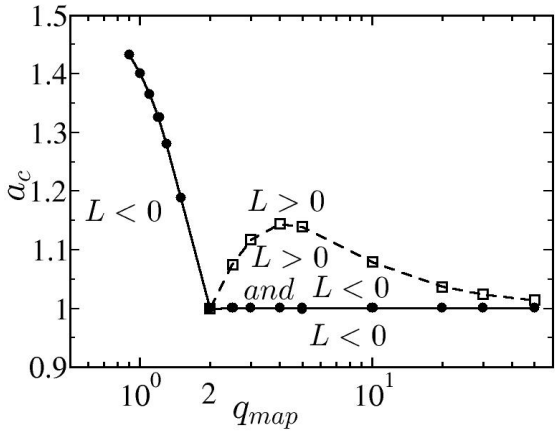

Figura 3.4: Dependência do primeiro ponto de bifurcação por acumulação de duplicação de período a_c sobre q_{map}. Para $q_{map} > 2$ esta é uma região que exibe coexistência de atratores, dependendo da condição inicial. Valores de L para esta figura foram calculados sem o tempo transiente e tempo final $t_{end} = 2^{18}$, e incremento do parâmetro de controle $\Delta a = 10^{-7}$. O ponto crítico é encontrado dentro do limite $0 < \lambda_{max} < 5 \times 10^{-5}$.

Tabela 3.1: Pontos críticos

q_{map}	a_{λ_-}	a_{λ_+}	a_c
1.00	1.40115518	1.40115520	1.401155189092
1.01	1.3977569	1.3977571	1.397757026
1.02	1.3943177	1.3943179	1.394317802
1.03	1.3908370	1.3908372	1.390837098
1.04	1.3873144	1.3873146	1.387314512
1.05	1.3837496	1.3837498	1.383749669
1.10	1.3652805	1.3652807	1.365280586
1.20	1.3250906	1.3250908	1.325090670
1.30	1.2811360	1.2811362	1.281136143
1.40	1.2353387	1.2353389	1.235338767
1.45	1.2125150	1.2125152	1.21251512
1.50	1.1900820	1.1900822	1.1900822

o expoente de Liapunov neste exemplo foi necessário dar um incremento de $\Delta a = 1.0 \times 10^{-8}$ e $t_{end} = 2^{23}$, e com um tempo transiente $t_{trans} = 2^{23}$. A identificação da transição de ordem para caos se torna computacionalmente custosa a medida que q_{map} se afasta da unidade.

3.3 Método da taxa de crescimento da entropia

Em (LATORA et al., 2000), os autores introduzem um método adicional para caracterização de mapas, através da taxa de crescimento da entropia, particularmente útil para diferenciar sistemas fortemente caóticos (com $\lambda_1 > 0$) dos sistemas fracamente caóticos (com $\lambda_1 < 0$). Inicialmente, o espaço de fases é dividido em W células, e em uma delas, escolhida adequadamente (veja adiante), são inseridas N condições iniciais (N pontos, distribuidos aleatoriamente ou uniformemente no interior desta célula, não importa). Cada um destes pontos vai evoluir segundo a dinâmica do mapa, até o tempo t, e os pontos vão se espalhar, ocupando células distintas. $N_i(t)$ é o número de pontos no interior da célula i ($1 \leq i \leq W$), e assim a razão $N_i(t)/N$ dá a probabilidade de ocupação da célula i no tempo t ($p_i(t)$). Com as probabilidades, é possível calcular a entropia $S_q(t)$, para qualquer valor de q que se queira. No instante inicial existe apenas uma célula ocupada; todas as demais estão vazias, o que corresponde a $S_q(t = 0) = 0, \forall q$. Com o espalhamento dos pontos, o valor da entropia $S_q(t)$ cresce. A variável relevante a ser avaliada é a taxa de crescimento da entropia, dada pela razão $S_q(t)/t$; mais especificamente, o valor relevante é esta razão para tempos longos ($\lim_{t\to\infty} S_q(t)$). Existe um valor específico q_{ent} para o qual a taxa de crescimento da entropia $S_{q_{ent}}$ é finita. Valores do índice q maiores que q_{ent} ($q > q_{ent}$) originam curvas côncavas de S_q versus t, portanto $\lim_{t\to\infty} S_q/t = 0$. Valores do índice q menores que q_{ent} ($q < q_{ent}$) originam curvas convexas de S_q versus t, portanto $\lim_{t\to\infty} S_q/t = \infty$. O valor adequado para o índice entrópico é exatamente aquele q_{ent} para o qual a razão $S_{q_{ent}}/t$ permanece finita no limite $t \to \infty$, que corresponde a uma crescimento linear. Para sistemas na região de caos forte ($\lambda_1 > 0$), $q_{ent} = 1$, e esses mapas são caracterizados pela entropia de Boltzmann-Gibbs. Entretanto, para sistemas na região de caos fraco, quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{q_{sen}} > 0$ (com $q_{sen} < 1$), o valor de q_{ent} (aquele valor que torna $\lim_{t\to\infty} S_q/t$ finita) é menor

que a unidade ($q_{ent} < 1$). O método visa estimar q_{ent}.

O procedimento descrito depende da escolha da célula inicial, e a seguir especificamos como são escolhidas as células adequadas. $N = 10^6$ condições iniciais são distribuídas arbitrariamente no o espaço de fases dividido em $W = 10^5$ células. O mapa é iterado 50 vezes para cada uma das condições iniciais e são observadas, a cada iterada, quais das W células foram visitadas. Ao final das 50 iteradas de todas as condições iniciais serão contabilizadas um total de 50×10^6 visitas distribuídas sobre as W células. Células com número de visitas superior a um limite arbitrariamente escolhido como $N_{occ} > 5000$ são consideradas aquelas que contêm as melhores condições iniciais. Para cada uma destas células é relizado o procedimento descrito, de colocar N pontos no instante inicial, evoluir o mapa, e avaliar a entropia $S_q(t)$ em cada instante de tempo t. Para cada instante de tempo, o método avalia a entropia $\langle S_q(t) \rangle$, que é uma média sobre todas as células que passaram pelo teste de $N_{occ} > 5000$.

O índice q_{ent} é aquele valor para o qual a curva $\langle S_q \rangle$ versus t é uma linha reta. Para avaliar o quão próximo se está de uma reta, (LATORA et al., 2000) ajustam uma função quadrática $\langle S_q(t) \rangle = a + bt + ct^2$ em um intervalo de tempo entre t_i e t_f e avaliam o coeficiente definido por $R = |c|(t_i + t_f)/b$. O valor q_{ent} é aquele para o qual R é minimo. Os limites t_i e t_f devem ser escolhidos apropriadamente: o valor de t_i deve ser grande o suficiente para que não interfira com flutuações das primeiras iteradas e t_f deve ser o maior possível sem que prejudique a avaliação devido ao tamanho finito do sistema.

O método é, portanto, abrangente, desde sistemas simples com expoente de Liapunov positivo até sistemas com expoente de Liapunov próximo de zero. Esta característica deve ser destacada pois numericamente é possível o cálculo de uma entropia crescente apenas, para um sistema que apresenta alguma desordem. Portanto, a avaliação trata de sistemas caóticos ou fracamente caóticos. Logo, o valor investigado do parâmetro de controle deve ser $a \geq a_c$. Como não conhecemos o valor do parâmetro crítico a_c com infinita precisão, na execução do método é preferível que o erro em a_c seja a maior (digamos $a = a_c + \epsilon$), para que se garanta estar na região de comportamento caótico, e não na de comportamento ordenado. Quanto

mais próximos estivermos de a_c, i.e., quanto menor ϵ, o mapa se comporta como se estivesse no limiar do caos por mais tempo.

Para a caracterização da dinâmica do mapa q-logístico através do método da taxa de crescimento da entropia foram considerados valores arbitrários do parâmetro algébrico de deformação q_{map} dentro do intervalo[2] $]1, 2[$, já apresentados na tabela 3.1. Nesta tabela também estão indicados os valores críticos do parâmetro de controle que foram determinados através do cálculo do expoente máximo de Liapunov.

Nas figuras 3.5 são apresentados para diferentes valores de q_{map} os gráficos do número integrado de visitas em função da posição central das células visitadas. Entre os casos está $q_{map} = 1$, que reproduz o resultado encontrado por Latora et al. (2000). Para destacar um comportamento regular encontrado para os casos de $q_{map} \neq 1$, a abscissa dos gráficos é apresentada no intervalo $x \in [0.5, 0.6]$. À medida que o parâmetro q_{map} aumenta de 1 a 2, o número de visitas em cada célula fica mais distribuído, porém assume um comportamento oscilatório cada vez mais simples. Estes padrões também são coerentes com outras propriedades observadas como o expoente máximo de Liapunov (ver figuras 3.1) para os diferentes valores de q_{map}.

A figura 3.6 apresenta o número de células com o número integrado de visitas em função do valor do q_{map}. O decaimento do número de células visitadas que atendem o critério na escolha das condições iniciais para estimativa da entropia média indica que à medida que o parâmetro q_{map} cresce em direção ao valor 2, o número de visitas nas células tende a um perfil cada vez mais uniforme. Porém, deve-se investigar este comportamento com o aumento do número de células W, pois para $q_{map} > 1.3$ existe dúvida sobre o efeito do tamanho do sistema.

Uma vez selecionado o conjunto de células para cada valor de q_{map} são estimadas os valores da entropia para diferentes valores de q para determinar o valor de q_{ent}. Os valores estimados de q_{ent} versus o valor de q_{map} são apresentados no gráfico 3.8. Deve-se observar que à medida que o parâmetro $q_{map} \to 2$ as flutuações da entropia são cada vez maiores em valor absoluto e relativo ao valor da valor da entropia que tem valor absoluto decrescente com o aumento de q_{map}. Portanto, deve-se investigar o sistema para valores maiores de W e por consequência aumentar o número de

[2]Para este intervalo a Swcharziana do mapa q-logístico é negativa.

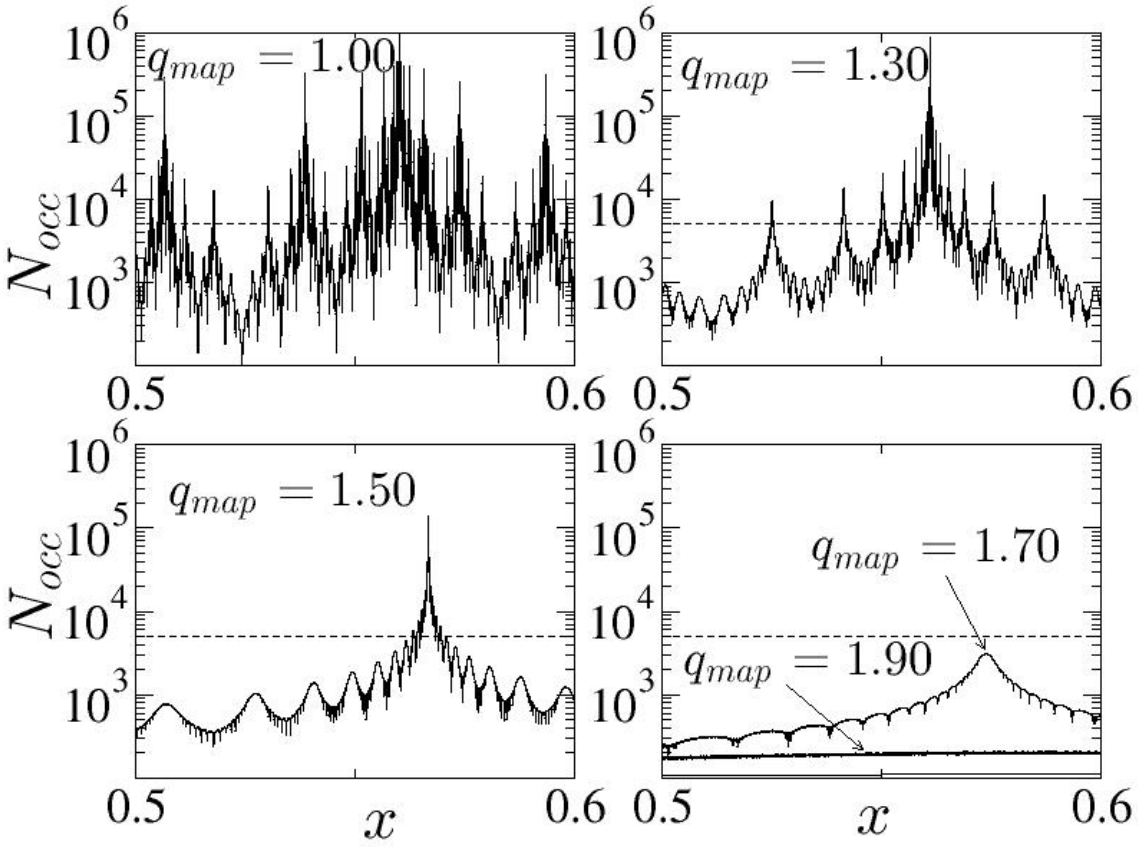

Figura 3.5: Número integrado de visitas por célula para cinco casos ($q_{map} = 1, 1.30, 1.50, 1.70, 1.90$). Espaço de fases é dividido em $W = 10^5$ células, cada uma contem 10^6 pontos uniformemente distribuidos. Tempo de evolução acima de 50 iterações. Figuras apresentam $x \in [0.5, 0.6]$ para melhor visualização.

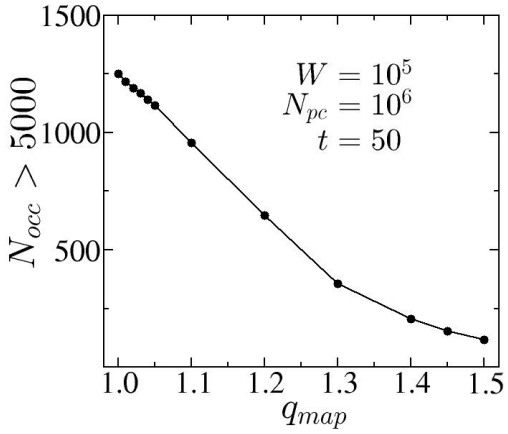

Figura 3.6: Número de células com mais de 5000 visitas numa corrida de 50 iteradas como uma função de q_{map}. $N_{pc} = 10W$ é o número de condições iniciais por célula. A linha tracejada horizontal na Fig.3.5 indica o limite de 5000 visitas por células.

condições por célula. Em geral, os limites da definição da entropia devem crescer em conjunto, uma discussão detalhada sobre os efeitos da ordem da mudança dos limites aplicados ao sistema para estimativa da entropia podem ser vistos em (BORGES, 2004b).

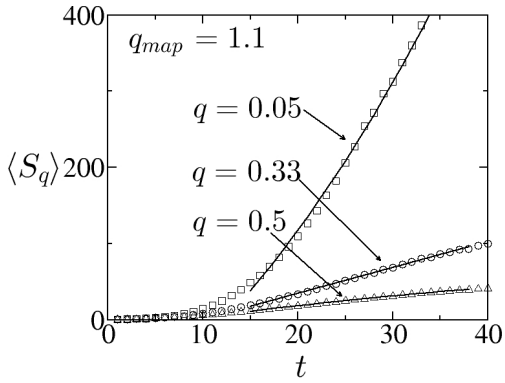

Figura 3.7: Entropia média para $q_{map} = 1.1$, com $q_{ent} = 0.33$, encontrado pela regressão de $\langle S_q(t) \rangle = a + bt + ct^2$ (vide texto) para o intervalo de tempo $15 \leq t \leq 38$ (o mesmo valor é usado (LATORA et al., 2000)). Para $t < 15$, $c > 0$, e por esta razão esta região é excluida. Para $q < q_{ent}$, $c > 0$. Para $q > q_{ent}$ $c < 0$. $c = 0$ é apresentado com círculos.

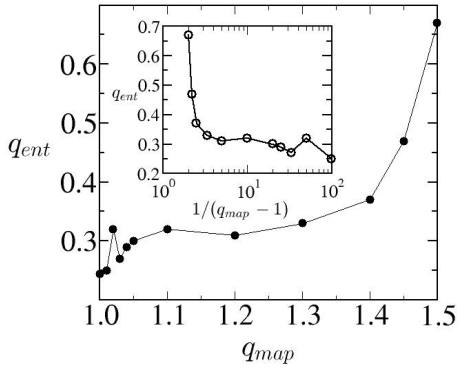

Figura 3.8: q_{ent} em função de q_{map}. *Inset* apresenta abscissa em escala logaritmica. O valor para $q_{map} = 1.02$ possivelmente é devido a alguma imprecisão numérica. As linhas são para guiar os olhos.

Capítulo 4

Métodos de relaxação

4.1 Dinâmica de relaxação

O parâmetro de sensibilidade às condições iniciais está relacionado a característica multifractal do atrator crítico (MOURA; TIRNAKLI; LYRA, 2000; BORGES, 2004b; TSALLIS, 2009) e como explicado no capítulo 3 essas medidas necessitam da escolha do conjunto de células adequadas para estimativas do q_{ent}. Esta dependência em relação às células motivou o desenvolvimento de um método que parte de todo o espaço de fases ocupado. Este método consiste na evolução temporal do sistema discreto com o domínio do espaço de fases (dividido em W células) preenchido com N condições iniciais em cada célula (total de NW pontos). Exceto no caso $a = 2$, quando o mapa é completamente caótico e todo o espaço de fases é ocupado (vide Figura 2.4), nem todas as células fazem parte do atrator. Assim, ao longo da evolução temporal, algumas células deixarão de ser visitadas, e o número de células efetivamente ocupadas diminui, a medida que o sistema relaxa para o atrator. À cada iterada t do sistema discreto, são contabilizadas o total de células $W(t)$ que contém pelo menos um evento ($W(t)$ diminui com t).

Devido a invariância de escala discreta do atrator crítico, a convergência apresenta oscilações log-periódicas (SORNETTE, 1998 apud MOURA; TIRNAKLI; LYRA, 2000). Logo, Moura, Tirnakli e Lyra (2000) propõem uma equação formada por dois elementos, que contém o produto entre uma função lei de potência e uma

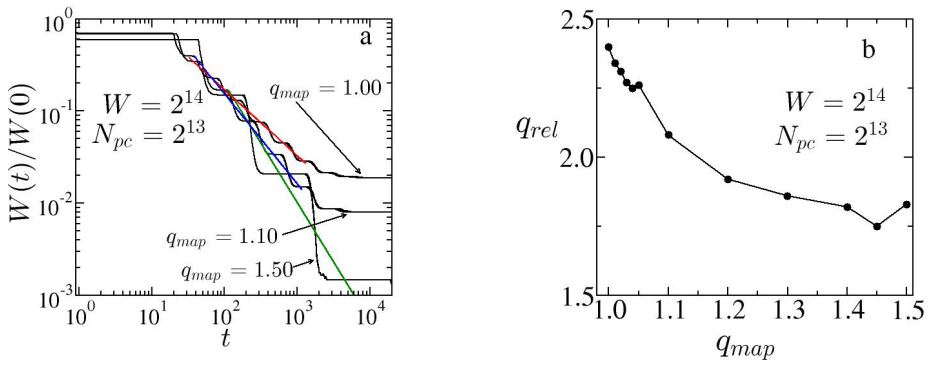

Figura 4.1: Relaxação ao atrator crítico para o limiar do caos. Fig. a é um gráfico de $W(t)/W(0) \times t$ em log-log para três diferentes valores de q_{map}. Pode ser visto o resultado da regressão das leis de potência onde as inclinações são identificadas como $1/(1-q_{rel})$. Fig. b apresenta q_{rel} em função de q_{map}. Foi usado $W = 2^{14}$ e o número de condições iniciais por célula $N_{pc} = 2^{13}$. As linhas são somente para guiar os olhos. Flutuações na curva da Fig. b são devido a incerteza — os resultados são muito sensíveis a pequenas mudanças nas características dos parâmetros.

função periódica, esta equação é capaz de representar o comportamento log-periódico de $W(t)$. Para $t \gg 1$ e $q > 1$ a função q-exponencial comporta-se assintoticamente como lei de potência, $W(t) \propto 1/t^{\frac{1}{q-1}}$. Assim, dessa relação é avaliado o parâmetro dinâmico q, denominado q_{rel}, onde rel significa relaxação. A equação completa (e não apenas a parte assintótica) é

$$W(t) = (1 + (1 - q_{rel})K_{q_{rel}}t)^{\frac{1}{1-q_{rel}}}, \tag{4.1}$$

com $q_{rel} > 1$.

A Figura 4.1a apresenta o resultado para a fração de células ocupadas $W(t)/W(0)$ para diferentes valores de q_{map} para seus correspondentes pontos críticos. Oscilações log-periódicas apresentam aumento do período para $q_{map} \to 2$. A inclinação na escala log-log (Fig. 4.1a) para a região de oscilações log-periódicas é usada para estimar q_{rel} (slope $= 1/(1 - q_{rel})$). A Fig. 4.1b apresenta q_{rel} em função de q_{map}.

O procedimento para estimação de q_{rel}, isto é, a fonte do número de células ocupadas, é também usado para estimar a dimensão fractal para o limiar do caos

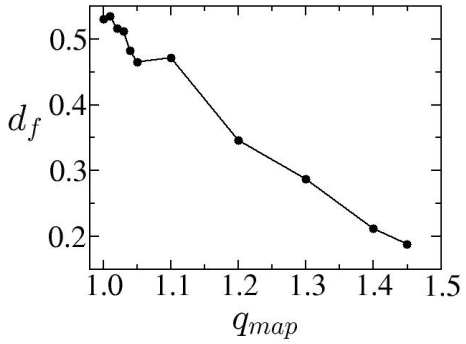

Figura 4.2: Dimensão fractal para o limiar do caos como uma função do q_{map}. Para o mapa logístico usual ($q_{map} = 1$), $d_f(a_c) = 0.53665$. As linhas são para guiar os olhos. Flutuações nas curvas são devido a incerteza — o método é muito sensível a pequenas mudanças nas características dos parâmetros.

(é um tipo de método de contagem das caixas). $W(\infty)$ cresce com $W(0)$ de acordo com $W(\infty) \propto [W(0)]^{d_f}$. A dimensão fractal decresce com q_{map} como apresentado na Fig. 4.2.

Como demonstrado anteriormente, o método da relaxação trata-se de uma avaliação ao longo do tempo (com $W \to \infty$), para definir uma característica da dinâmica do sistema. Por outro lado o método da contagem das caixas estabelece uma característica geométrica assintótica para o limite em que o sistema atinge o estado quase-estacionário. Portanto, neste método preenche-se o espaço de fases não necessariamente com uma distribuição uniforme ou gaussiana, também é possível ocupa-lo inicialmente de forma que todas células contenham um estado inicial. Em seguida, o sistema (eq. 2.24) é evoluído para cada condição inicial nas diferentes células do espaços de fases, e para cada iterada são contabilizadas o número total de células ocupadas W_{occ}. Ao longo do tempo, como no método da relaxação, o número de células ocupadas vai reduzindo, até um valor do tempo para qual o número de células ocupadas passa oscilar em torno de uma média, ou seja, o sistema aproximou-se de um sistema quase-estacionário ou atingiu o atrator, com divisão do espaço de fases finita e tempo de iteradas finito. O número de interesse neste método é exatamente este número de células ocupadas ao final das iteradas. Este procedimento é realizado

para valores crescentes de W_{max}. Ao final é realizada uma regressão entre o número de W_{final} versus W_{ini}. Foi adotado que o número de condições iniciais é o dobro do número de divisões do espaço de fases.

4.2 Distribuições quase-estacionárias

Os métodos apresentados até este ponto, exceto a estimativa da dimensão fractal, consideram essencialmente a dinâmica do atrator crítico. Contudo existem outras propriedades de sistemas complexos que também ocorrem em sistemas discretos. Por exemplo, a quebra de ergodicidade, que está presente no mapa logístico e seus derivados (TIRNAKLI; BECK; TSALLIS, 2007; TIRNAKLI; TSALLIS; BECK, 2009a; RUIZ; TSALLIS, 2009). O teorema central do limite é um dos conceitos mais importantes em teoria de probabilidade e mecânica estatística. Tirnakli, Beck e Tsallis (2007) apresentaram uma abordagem empírica de caracterização de sistemas com propriedades emergentes como quebra de ergodicidade. Esta abordagem consiste na representação da densidade de probabilidade através de distribuições q-gaussianas. Uma q-gaussiana recupera a gaussiana para o valor de $q = 1$ e esta é utilizada para representar fenômenos ergódicos.

O conjunto dos valores da medida de y (ver eq. 4.2) permite observar a densidade de probabilidade. Sistemas ergódicos tem densidade de probabilidade representada por gaussianas. O fenômeno da quebra de ergodicidade em sistemas complexos é evidenciado por densidade de probabilidade diferentes das gaussianas. Especialmente para o mapa logístico no limiar do caos foi observado que as distribuições que podem representar estas densidades de probabilidades são as q-gaussianas. O parâmetro q da q-gaussiana que melhor modela estes pontos de densidade de probabilidade é chamado de q_{stat}, onde *stat* é de *stationary*. Também foi observado para o mapa logístico a relação entre a aproximação do parâmetro crítico $|a_c - a|$ e o número de iteradas N através da lei de escala de Huberman-Rudnick, sendo generalizada por Afsar e Tirnakli (2012).

O mapa logístico, para o caso em que o parâmetro de controle é igual a 2 é ergódico (também conhecido como mapa de Ulam).

A avaliação empírica da variável soma dos desvios reescalados por uma função de N eventos é dada pela equação 4.2,

$$y = N^{\gamma} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle), \tag{4.2}$$

onde $\langle x \rangle$, é dado por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n_{ini}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n_{ini}} \sum_{i=1}^{N} x_i^{(j)}. \tag{4.3}$$

Esta variável gera comportamento ergódico para o caso em que o mapa logístico tem parâmetro de controle igual a 2 e $q_{stat} = 1$, valor que recupera o caso usual da gaussiana. Entretanto, esta propriedade não é mantida para valores do parâmetro de controle em torno do atrator crítico a_c, ou seja, manifesta quebra de ergodicidade. As distribuições encontradas para estes casos têm características particulares como oscilações log-periódicas e podem ser representadas por uma distribuição q-gaussiana.

O método apresentado nesta seção foi aplicado ao mapa q-logístico para diferentes valores do q_{map}, na vizinhança do limiar do caos. Os valores do parâmetro de controle utilizados nesta avaliação estão indicados na tabela 3.1. Inicialmente são distribuídas sobre todo o espaço de fases $n_{ini} = 5 \times 10^7$ condições iniciais com uma distribuição uniforme. O mapa é iterado para cada condição inicial com tempo total $N_{trans} = 2^{12}$, o conjunto de todas as trajetórias são utilizados para a estimativa de uma média global definida por $\langle x \rangle$ eq. 4.3. Por fim, são estimados os valores da variável y pela equação 4.2. Após realizadas as estimativas da variável y para valores de $q_{map} \neq 1$ foi observado que os dados de densidade de probabilidade distanciam de uma q-gaussiana à medida que q_{map} se afasta de 1. Nas figuras 4.3 são apresentadas as distribuições da variável y para os diferentes valores de q_{map} comparados com caso da q-gaussiana obtida para o caso do $a_c = 1.4011644$ para o mapa logístico. Este valor é uma aproximação do valor crítico segundo uma lei de escala de Huberman-Rudnick apresentado em (TIRNAKLI; TSALLIS; BECK, 2009b). Esta lei depende do número de iteradas N e da constante universal de Feigenbaum δ. Esta lei de escala também foi investigada por Ruiz e Tsallis (2009) para uma nova classe de mapas unimodais.

Ao contrário dos outros métodos para determinação dos parâmetros q_{sen} e q_{rel},

que avaliam a convergência para o conjunto atrator crítico, o método de avaliação da distribuição da variável y elimina um tempo transiente N_{trans}.

Verifica-se visualmente através das distribuições acima em comparação com a q-gaussiana traçada em linha preta, que existe uma mudança de perfil da distribuição à medida que o parâmetro q_{map} afasta-se de 1.

Os parâmetros n_{ini}, N_{trans} e N utilizados para o caso de $q_{map} = 1$ foram mantidos porém os pontos de densidade de probabilidade obtidos para o mapa q-logístico para diferentes valores de q_{map} não tem boa representação por uma q-gaussiana. Para todos os casos, a região central da densidade de probabilidade não apresenta muitos pontos, o que indica que existe a necessidade de aumentar n_{ini} ou N. Outro aspecto importante é a presença de curvatura para a cauda (ver figuras 4.3) que pode indicar a presença de caos forte, ou seja, a esta muito distante a_c. Para $q_{map} = 1.1$ não é possível observar oscilações log-periódicas.

Como notado nos outros métodos, existe uma suspeita da necessidade de aproximação numérica do parâmetro crítico em escalas menores quando $q_{map} \to 2$.

No próximo capítulo são discutidos alguns aspectos relevantes para o conjunto de métodos de caracterização de sistemas dinâmicos aplicados ao q-logístico.

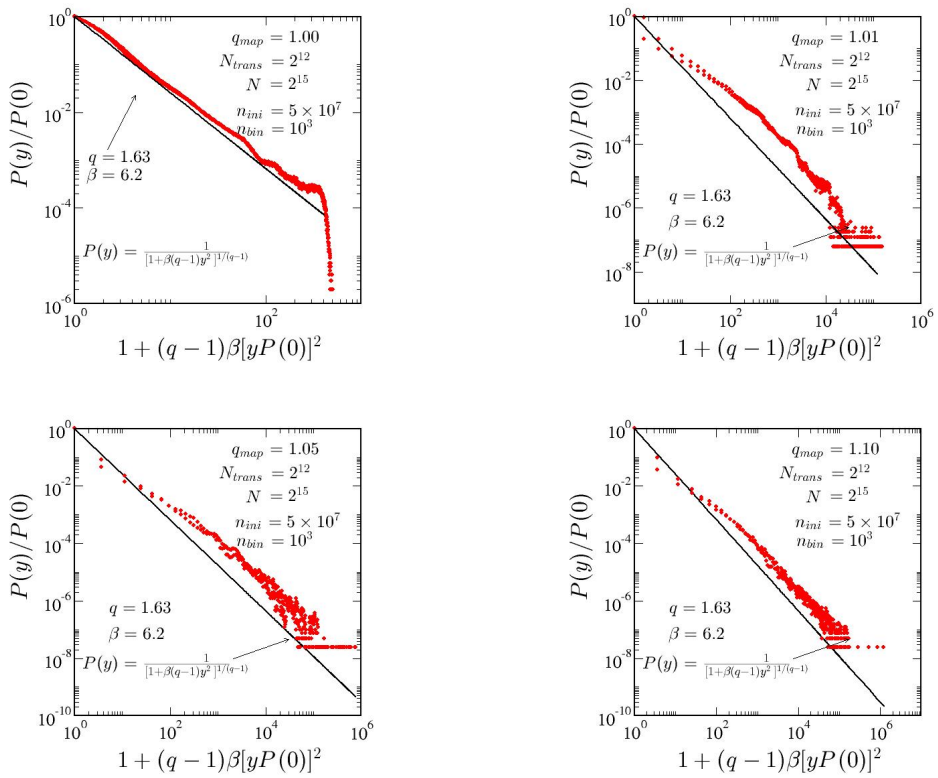

Figura 4.3: Densidade de probabilidade normalizadas pelo valor máximo $P(0)$ para os casos de $q_{map} = [1.00, 1.01, 1.05, 1.10]$ modelados pela distribuição q-gaussiana ($P \sim e_q^{-\beta y^2}$) com o parâmetro $q_{stat} = 1.63$ e $\beta = 6.2$,representadas no gráfico pelas linhas de cor preta. Os pontos vermelhos são as estimativas da função densidade de probabilidade calculadas a partir dos dados das iteradas de $n_{ini} = 5 \times 10^7$ condições iniciais espalhadas sobre todo o espaço de fases do mapa q-logístico. Para o caso de $q_{map} = 1.00$ o valor do $a_c = 1.4011644$ (ver referência (TIRNAKLI; TSALLIS; BECK, 2009b))

Capítulo 5

Conclusões

A generalização do mapa logístico por meio do q-produto introduz interessantes características no seu comportamento dinâmico. Nossa analise é focada sobre $q_{map} > 1$. Nesta região, as janelas de ordem dentro do caos desaparecem com o incremento de q_{map} até desaparecer completamente e o mapa tornar-se o mapa da cabana.

Para $q_{map} < 1$ (não analisada nesta dissertação) o comportamento oposto ocorre: a região de caos torna-se estreita e o cenário da ordem é dominante. Nós temos calculado a sensibilidade às condições iniciais, a taxa de incremento da entropia, a relaxação ao atrator crítico e a dimensão fractal para o limiar do caos. Estes métodos permitem calcular q_{ent} e q_{rel} para diferentes valores de q_{map}. Os parâmetros da entropia e da relaxação são dois índices que aparecem com frequência dentro do contexto da mecânica estatística não extensiva e o entendimento da sua depêndencia sobre o parâmetro de controle de um sistema podem levar a sua determinação a priori. Várias outras evoluções para este mapa q-logístico podem ser feitas, p. ex., a depência de q_{rel} sobre uma larga divisão W e sua relação para q_{sen} (como em (BORGES et al., 2002) para o mapa z-logistico, e como em (BORGES; TIRNAKLI, 2004a; BORGES; TIRNAKLI, 2004b) para o mapa de Hénon, a distribuição de probabilidade da soma das iteradas como em (TIRNAKLI; BECK; TSALLIS, 2007; TIRNAKLI; TSALLIS; BECK, 2009a), multifractalidade como foi feito em (LYRA; TSALLIS, 1998) e bifurcações tangentes.

Os índices q_{sen}, q_{rel} e q_{stat} formam o q-tripleto (TSALLIS, 2009). Para o caso de

caos forte todos estes índices são iguais a 1, fazendo a recuperação das respectivas funções exponenciais. Na região de caos fraco estes índices assumem outros valores. Para algumas classes de mapas unimodais foram obtidos valores de $q_{sen} < 1$, $q_{rel} > 1$ e $1 < q_{stat} < 3$. Para o mapa q-logístico, os parâmetros do estimados foram estimados valores de $q_{ent} < 1$ e $q_{rel} > 1$. A conjectura da validade da identidade de Pesin para o limiar do caos implica nas relações generalizadas:

$$K_{q_{ent}} = K_{q_{sen}} = \lambda_{q_{sen}}, \tag{5.1}$$

e

$$q_{ent} = q_{sen}. \tag{5.2}$$

Não obtivemos elementos suficientes para verificar a validade desta conjectura para o mapa q-logístico, em valores arbitrários de q_{map}. À medida que o parâmetro q_{map} sai de 1 para 2, o sistema avança de um mapa com rota para o caos através do acúmulo de bifurcações (mapa logístico), para um sistema com caos robusto ($q_{map} = 2$). Para observar as propriedades no limiar do caos, é necessário que o valor utilizado para o parâmetro a_c seja cada vez mais próximo de seu valor verdadeiro (i.e., deve ser utilizado um valor com um número de casas decimais cada vez maior), a medida que q_{map} se aproxima de 2. Isto deve implicar também em esforço computacional cada vez maior.

Para o mapa q-logístico, a caracterização da propriedade L através do q_{sen} não foi possível ser realizada devido ao valor de do parâmetro de controle a não estar suficientemente próximo do valor crítico a_c. As flutuações nos valores máximos (supremo) de L, na figura 3.3, são muito acentuadas, de modo que fica comprometido aproximá-las por uma reta, e estimar q_{sen}.

As relações entre índices do tripleto também podem estar associadas às equações de dualidade: dualidade aditiva $q' = 2-q$, dualidade multiplicativa $q'' = 1/q$, e uma combinação de ambas, $q''' = 2 - 1/q$. Estas dualidades estão relacionadas com propriedades de q-exponenciais: por exemplo ((TSALLIS, 2009))

$$e_q^x e_{2-q}^{-x} = 1 \quad \forall q \tag{5.3}$$

$$(e_q^x)^q e_{1/q}^{-qx} = 1 \quad \forall q \tag{5.4}$$

$$(e_q^x)^q = e_{2-1/q}^{qx} \quad \forall q \tag{5.5}$$

$$\frac{d}{dx} \exp_q x = \exp_{2-1/q}(qx) \quad \forall q. \tag{5.6}$$

Através dos dados do campo magnético resultantes dos ventos solares observados pela nave Voyager 1 da NASA próximo à 40AU e 85AU durante 1989 e 2002, respectivamente, Burlaga e Viñas (2005) estimaram os valores do q-tripleto ($q_{stat} = 1.75 \pm 0.06$,$q_{sen} = -0.6 \pm 0.2$ e $q_{rel} = 3.8 \pm 0.3$). Os valores destes parâmetros não apresentaram mudanças significativas para os dois conjuntos de dados. Estes resultados reforçam a necessidade de compreensão da relação entre os parâmetros do tripleto. Estas relações são mais facilmente exploradas quando estudados sobre sistemas como mapas.

A análise mais precisa do mapa q-logístico para obtenção de propriedades do q-tripleto exige o aprimoramento das técnicas de determinação do parâmetro de controle no limiar do caos, uma vez que para a região em que as propriedades apresentam entrada no caos por duplicação de período($SD(f(x)) < 0$) existe variação de escala da aproximação do parâmetro crítico em função de q_{map}. Em relação às estimativas do q_{rel} existe a suspeita de que a amplitude das oscilações periódicas aumentam com o tempo, portanto é necessário aumentar W e número de condições de iniciais por célula. Quanto à estimativa de q_{ent} é necessário explorar as características geométricas encontradas na estimativa da melhor célula de condições iniciais 3.5. E para a estimativa de q_{stat}, é preciso observar as leis de perda de oscilações *log*-periódicas à medida que $qmap \to 2$. Esta dissertação deixa ainda em aberto a caracterização das diferentes rotas para o caos para as regiões de q_{map} para $SD(f(x)) > 0$. A coexistência de atratores e características do caos robusto merecem análise detalhada adicional.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Limites para o q-produto

Os limites de $q_{map} \to -\infty$, $q_{map} \to 1$ e $q_{map} \to \infty$ para q-produto (equação 1.16 caso em que $y = x$) nos conduzem a limites indeterminados dos tipos 0^{∞}, ∞^{0} e 0^{0}.

Caso I - $q \to -\infty$

$$\lim_{q \to -\infty} x \otimes_q x = \lim_{q \to -\infty} \left[2|x|^{1-q} - 1\right]_{+}^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.1}$$

$$\lim_{q \to -\infty} x \otimes_q x = \lim_{q \to -\infty} \left[2|x|^{\infty} - 1\right]_{+}^{\frac{1}{\infty}} \tag{A.2}$$

$$\lim_{q \to -\infty} x \otimes_q x = \lim_{q \to -\infty} \left[2|x|^{\infty} - 1\right]_{+}^{0} \tag{A.3}$$

Neste caso, verifica-se que existe uma restrição $x = \pm 1$, já que a soma das parcelas entre colchetes deve ser positiva, assim;

$$\lim_{q \to -\infty} x \otimes_q x = \lim_{q \to -\infty} \left[2 \times 1^{\infty} - 1\right]_{+}^{0} \tag{A.4}$$

$$\lim_{q\to-\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to-\infty} [1]_+^0 \tag{A.5}$$

encontrando um limite indeterminado, entretanto podemos reescrever este limite por outro caminho, sendo com a restrição $x = \pm 1$.

$$\lim_{q\to-\infty} h(q)^{g(q)} \tag{A.6}$$

para $h(q) > 0$

$$\lim_{q\to-\infty} h(q)^{g(q)} = \exp L \tag{A.7}$$

sendo

$$L = \lim_{q\to-\infty} g(q) \ln\left(h(q)\right) \tag{A.8}$$

$$g(q) = \frac{1}{1-q}$$
$$h(q) = \left[2|x|^{1-q} - 1\right]$$

$$\lim_{q\to-\infty} g(q) = 0 \tag{A.9}$$

$$\lim_{q\to-\infty} h(q) = 1 \tag{A.10}$$

logo

$$L = \lim_{q\to 1} |0 \ln(0)| = 0 \tag{A.11}$$

assim

$$\lim_{q\to-\infty} x \otimes_q x = 1 \tag{A.12}$$

Caso II - $q \to 1$

$$\lim_{q\to 1} x \otimes_q x = \lim_{q\to -1} \left[2|x|^{1-q} - 1\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.13}$$

$$\lim_{q\to 1} x \otimes_q x = \lim_{q\to -1} \left[2|x|^{0} - 1\right]_+^{\frac{1}{0}} \tag{A.14}$$

$$\lim_{q\to 1} x \otimes_q x = \lim_{q\to -1} \left[2|x|^{0} - 1\right]_+^{\infty} \tag{A.15}$$

$$\lim_{q\to 1} h(q)^{g(q)} \tag{A.16}$$

para $h(q) > 0$

$$\lim_{q\to 1} h(q)^{g(q)} = \exp L \tag{A.17}$$

sendo

$$L = \lim_{q\to 1} g(q) \ln\left(h(q)\right) \tag{A.18}$$

$$g(q) = \frac{1}{1-q}$$
$$h(q) = \left[2|x|^{1-q} - 1\right]$$

$$\lim_{q\to 1^{\mp}} g(q) = \pm\infty \tag{A.19}$$

$$\lim_{q\to 1^{\mp}} h(q) = 0 \tag{A.20}$$

$$L = \lim_{q\to 1} |g(q)\ln(h(q))| \tag{A.21}$$

$$L = \lim_{q\to 1^{\mp}} |g(q)\ln(h(q))| = |\pm\infty\cdot 0| = \infty\cdot 0 \tag{A.22}$$

$$\lim_{q\to 1} \frac{\ln([2|x|^{1-q}-1])}{1-q} = \frac{0}{0} \tag{A.23}$$

para este limite indeterminado podemos aplicar L'Hospital,

$$\lim_{q\to 1} \frac{2|x|^{1-q}\ln|x|}{[2|x|^{1-q}-1]} = 2\ln|x| \tag{A.24}$$

Se aplicarmos a transformação à proposta anteriormente

$$L = \ln|x|^2 \tag{A.25}$$

$$\exp L = |x|^2 \tag{A.26}$$

Caso III $q \to \infty$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to\infty} \left[2|x|^{1-q}-1\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.27}$$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to\infty} \left[2|x|^{-\infty} - 1\right]_+^{\frac{1}{-\infty}} \tag{A.28}$$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to\infty} \left[2|x|^{-\infty} - 1\right]_+^{0} \tag{A.29}$$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to\infty} \left[2 \times 1^{\infty} - 1\right]_+^{0} \tag{A.30}$$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = \lim_{q\to\infty} \left[\infty\right]_+^{0} \tag{A.31}$$

encontrando um limite indeterminado, entretanto podemos reescrever este limite por outro caminho, sendo com a restrição $x = \pm 1$.

$$\lim_{q\to 1} h(q)^{g(q)} \tag{A.32}$$

para $h(q) > 0$

$$\lim_{q\to 1} h(q)^{g(q)} = \exp L \tag{A.33}$$

sendo

$$L = \lim_{q\to 1} g(q) \ln\left(h(q)\right) \tag{A.34}$$

$$g(q) = \frac{1}{1-q}$$
$$h(q) = \left[2|x|^{1-q} - 1\right]$$

$$\lim_{q\to\infty} g(q) = 0 \tag{A.35}$$

$$\lim_{q\to\infty} h(q) = \infty \tag{A.36}$$

logo

$$L = \lim_{q\to\infty} g(q) \ln\left(h(q)\right) = 0 \cdot \infty = 0 \cdot \infty \tag{A.37}$$

$$\lim_{q\to 1} \frac{\ln\left([2|x|^{1-q} - 1]\right)}{1-q} = \frac{\infty}{-\infty} \tag{A.38}$$

podemos utilizar a regra de L'Hospital

$$\lim_{q\to\infty} \frac{2|x|^{1-q} \ln|x|}{[2|x|^{1-q} - 1]} = \frac{\infty}{\infty} \tag{A.39}$$

derivando mais uma vez, teremos

$$\lim_{q\to\infty} \frac{2|x|^{1-q} \ln|x| \ln|x|}{2|x|^{1-q} \ln|x|} = \ln|x| \tag{A.40}$$

$$\lim_{q\to\infty} x \otimes_q x = |x| \tag{A.41}$$

A.2 Derivada schwarziana

Sendo a equação do mapa logístico generalizado representada pela função abaixo:

$$f(x) = 1 - ax \otimes_{q_{map}} x = 1 - a[2|x|^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.42}$$
$$-1 \leq x_n \leq 1$$
$$0 < a \leq 2$$

Denotaremos por base do q-produto a equação A.43

$$B_+ = [2|x|^{1-q} - 1]_+ \tag{A.43}$$

assim a função assume a seguinte representação;

$$f(x) = 1 - aB_+^{\frac{1}{1-q}}.$$

As derivadas de primeira, segunda ordem da função do mapa generalizado necessárias ao cáculo da derivada schwarziana são dadas pelas equações a seguir:

$$f^{'}(x) = -a\frac{1}{1-q}B_+^{\frac{1}{1-q}}B_+^{'}$$

$$f^{''}(x) = -a\frac{1}{1-q}\left(\frac{q}{1-q}B_+^{\frac{2q-1}{1-q}}\left(B_+^{'}\right)^2 + B_+^{\frac{q}{1-q}}B_+^{''}\right)$$

$$\begin{aligned} f^{'''}(x) &= -a\frac{1}{1-q}\frac{q(2q-1)}{(1-q)^2}B_+^{\frac{3q-2}{1-q}}\left(B_+^{'}\right)^3 \\ &\quad -a\frac{1}{1-q}3\frac{q}{1-q}B_+^{\frac{2q-1}{1-q}}B_+^{'}B_+^{''} \\ &\quad -a\frac{1}{1-q}B_+^{\frac{q}{1-q}}B_+^{'''} \end{aligned}$$

onde as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem da base são respectivamente:

$$B_{+}^{'} = 2(1-q)|x|^{-q}$$

$$B_{+}^{''} = 2(1-q)(-q)|x|^{-1-q}$$

$$B_{+}^{'''} = 2(1-q)(-q)(-1-q)|x|^{-2-q}$$

substituindo estas derivadas na equação da derivada schwarziana obtém-se:

$$\begin{aligned} SD(f(x)) &= \frac{4q(2q-1)|x|^{-2q}}{[2|x|^{1-q}-1]_{+}} \\ &\quad +6(1-q)(-q)|x|^{-1-q} + (-q)(-1-q)|x|^{-2} \\ &\quad -\frac{3}{2}\left(\frac{2q|x|^{-q}}{[2|x|^{1-q}-1]_{+}} + (-q)|x|^{-1}\right)^{2} \end{aligned} \tag{A.44}$$

Se expandirmos e reorganizarmos a equação A.44 é possível encontrar o seguinte resultado:

$$SD(f(x)) = \left(q_{map} - \frac{1}{2}q_{map}^{2}\right)|x|^{-2}\left(1 - \frac{4}{4-4|x|^{q_{map}-1} + |x|^{2(q_{map}-1)}}\right). \tag{A.45}$$

Este resultado facilita a avaliação do sinal desta derivada. O caso $q_{map} = 1$ corresponde ao caso usual do mapa logístico. Este limite pode ser verificado.

A.3 q-Exponencial

A maximização da entropia de Tsallis S_q sob determinados vínculos da aréa da distribuição e sobre a estimativa da média generalizada da energia E_i resulta na determinação da distribuição q-exponencial.

$$\Phi = S_q - \alpha \left(\sum_{i=1}^{W} P_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^{W} P_i^q E_i - U_q \right) \tag{A.46}$$

$$\frac{d\Phi}{dP_j} = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{W} q {P_i}^{q-1} \frac{dP_i}{dP_j} - \alpha \sum_{i=1}^{W} \frac{dP_i}{dP_j} - \beta \sum_{i=1}^{W} q {P_i}^{q-1} \frac{dP_i}{dP_j} \tag{A.47}$$

$$0 = \frac{1}{1-q} q P_j^{q-1} - \alpha - \beta q P_j^{q-1} E_j \tag{A.48}$$

$$\frac{1}{1-q} q P_j^{q-1} \left[1 - \beta (1-q) E_j \right] - \alpha = 0 \tag{A.49}$$

$$P_j = \left[\frac{\alpha(1-q)}{q} \right]^{\frac{1}{q-1}} \left[1 - (1-q)\beta E_j \right]^{\frac{1}{1-q}} . \tag{A.50}$$

Aplicando a equação do primeiro vínculo:

$$\sum_{j=1}^{W} P_j = 1 = \left[\frac{\alpha(1-q)}{q} \right]^{\frac{1}{1-q}} \sum_{j=1}^{W} \left[1 - (1-q)\beta E_j \right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.51}$$

$$\left[\frac{\alpha(1-q)}{q} \right]^{\frac{1}{q-1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{W} \left[1 - (1-q)\beta E_j \right]^{\frac{1}{1-q}}} = \frac{1}{Z_q} \tag{A.52}$$

$$P_j = \frac{1}{Z_q} \sum_{j=1}^{W} \left[1 - (1-q)\beta E_j \right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{A.53}$$

$$P_j = \frac{1}{Z_q} e_q^{-\beta E_j} \tag{A.54}$$

A.4 q-Gaussiana

A equação da entropia de Tsallis na forma contínua é:

$$S_q[p(x)] = k\frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma}[\sigma p(x)]^q}{q-1} \tag{A.55}$$

a variável $p(x)$ é a densidade de probabilidade e σ é variância. A maximização da entropia deve atender aos vínculos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \tag{A.56}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} x^2 [\sigma p(x)]^q = \sigma^2. \tag{A.57}$$

Este procedimento consiste na definição de um funcional como segue:

$$\Phi = k\frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma}[\sigma p(x)]^q}{q-1} - \alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) - 1\right] - \beta\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} x^2 [\sigma p(x)]^q - \sigma^2\right],$$

a igualdade da derivada de Φ na direção de $p'(x)$ com zero, define qual função de densidade de probabilidade maximiza a entropia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial p'(x)} = k\frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma}\frac{\partial[\sigma p(x)]^q}{\partial p'(x)}}{q-1} \\ -\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial p(x)}{\partial p'(x)} - 1\right] \\ -\beta\frac{\partial\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} x^2 [\sigma p(x)]^q - \sigma^2\right]}{\partial p'(x)}\end{aligned} \tag{A.58}$$

$$\frac{\partial[\sigma p(x)]^q}{\partial p'(x)} = q[\sigma p(x)]^{q-1}\sigma\delta(p(x) - p'(x)) \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial p'(x)} = -k\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} q[\sigma p(x)]^{q-1}\sigma\delta(p(x) - p'(x))}{q-1} \\ -\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(p(x) - p'(x))\right] \\ -\beta\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} x^2 q[\sigma p(x)]^{q-1}\sigma\delta(p(x) - p'(x))\right]\end{aligned} \tag{A.60}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p'(x)} = -kq\frac{[\sigma p(x)]^{q-1}}{q-1} - \alpha - \beta\left[x^2 q[\sigma p(x)]^{q-1}\right] \tag{A.61}$$

$$0 = -kq\frac{[\sigma p(x)]^{q-1}}{q-1} - \alpha - \beta\left[x^2 q[\sigma p(x)]^{q-1}\right] \tag{A.62}$$

$$\alpha(q-1) = -kq[\sigma p(x)]^{q-1} - \beta(q-1)\left[x^2 q[\sigma p(x)]^{q-1}\right] \tag{A.63}$$

$$[\sigma p(x)]^{q-1} = \left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]\frac{1}{(1+\frac{\beta}{k}(q-1)x^2)} \tag{A.64}$$

$$[\sigma p(x)] = \left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]^{\frac{1}{q-1}}\frac{1}{(1+\frac{\beta}{k}(q-1)x^2)^{\frac{1}{q-1}}} \tag{A.65}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]^{\frac{1}{q-1}}\frac{1}{(1+\frac{\beta}{k}(q-1)x^2)^{\frac{1}{q-1}}} \tag{A.66}$$

Logo, fica definida a função de densidade de probabilidade como q-gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]^{\frac{1}{q-1}}\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right) \tag{A.67}$$

Os próximos passos são as deduções para definir as constantes α e β. Substituindo $p(x)$ no primeiro vínculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \tag{A.68}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]^{\frac{1}{q-1}}\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right) &= 1\\
\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\alpha(q-1)}{-kq}\right]^{\frac{1}{q-1}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right) &= 1\\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right) &= \frac{1}{\sigma}\left[\frac{kq}{\alpha(1-q)}\right]^{\frac{1}{q-1}}
\end{aligned} \tag{A.69}$$

Utilizando uma tabela de integração pode-se solucionar o elemento da esquerda da igualdade acima:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\exp_q\left(-ax^2\right)\right]^{\nu} =\\
&\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{q-1}-\frac{1}{2}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{q-1}\right)}.
\end{aligned} \tag{A.70}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta/k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{2}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{kq}{\alpha(1-q)}\right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{A.71}$$

Reorganizando os elementos desta igualdade é possível eliminar a constante α da equação de $p(x)$

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta/k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{kq}{\alpha(1-q)}\right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{A.72}$$

$$p(x)=\left[\frac{\beta(q-1)}{k\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right) \tag{A.73}$$

O segundo vínculo será utilizado para resolver a constante β.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sigma}x^2\left[\sigma\left[\left[\frac{\beta(q-1)}{k\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right)\right]\right]^q=\sigma^2 \tag{A.74}$$

$$\sigma^{(q-1)}\left[\frac{\beta(q-1)}{k\pi}\right]^{\frac{q}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^q\int_{-\infty}^{\infty}dxx^2\left[\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right)\right]^q=\sigma^2 \tag{A.75}$$

A solução tabelada para a equação do segundo vínculo pode ser resolvida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxx^2\left[\exp_q\left(-ax^2\right)\right]^{\nu}=\frac{1}{2a}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{q-1}-\frac{3}{2}\right)}{(q-1)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{q-1}\right)}. \tag{A.76}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dxx^2\left[\exp_q\left(-\frac{\beta}{k}x^2\right)\right]^q&=\frac{1}{2(\beta/k)}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta/k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}-\frac{3}{2}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}\\&=\frac{1}{2(\beta/k)}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta/k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}\end{aligned} \tag{A.77}$$

$$\sigma^{(q-1)}\left[\frac{\beta(q-1)}{k\pi}\right]^{\frac{q}{2}}\times\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^q\frac{1}{2(\beta/k)}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta/k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{(q-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}=\sigma^2 \tag{A.78}$$

$$\sigma^{(q-1)}\frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{k}\right]^{\frac{q-3}{2}}\pi^{\frac{1-q}{2}}(q-1)^{\frac{q-3}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^q\frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}=\sigma^2 \tag{A.79}$$

$$\frac{\sigma^{(q-1)}}{\sigma^2}\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_q}{\sigma^2}\right]^{\frac{q-3}{2}}\pi^{\frac{1-q}{2}}(q-1)^{\frac{q-3}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^q\frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}=1 \tag{A.80}$$

$$\Delta_q^{\frac{3-q}{2}} = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1-q}{2}}(q-1)^{\frac{q-3}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^q \frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)} \tag{A.81}$$

$$\Delta_q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\pi^{\frac{1-q}{3-q}}(q-1)^{-1} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)^{\frac{2(q-1)}{3-q}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)^q \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)^{-1}\right]^{\frac{2}{3-q}} \tag{A.82}$$

Aqui utiliza-se uma conhecida propriedade da função $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A.83}$$

$$\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{q-1}+1\right) \tag{A.84}$$

$$= \frac{1}{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) \tag{A.85}$$

$$\Delta_q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\pi^{\frac{1-q}{3-q}}(q-1)^{-1} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)^{\frac{2(q-1)}{3-q}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)^q \left[\frac{1}{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\right]^{-1}\right]^{\frac{2}{3-q}} \tag{A.86}$$

$$\Delta_q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\left(\frac{q-1}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)^{\frac{2(q-1)}{3-q}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)^q \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)^{-1}\right]^{\frac{2}{3-q}} \tag{A.87}$$

Assim Δ_q pode ser reescrito:

$$\Delta_q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3-q}}\left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{\frac{q-1}{3-q}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^{\frac{2(q-1)}{3-q}}. \tag{A.88}$$

$$\Delta_q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{3-q}}\left(\frac{q-1}{\pi}\right)^{\frac{q-1}{3-q}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^{\frac{2(q-1)}{3-q}} \tag{A.89}$$

$$\Delta_q = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{\pi}\right)\right]^{\frac{q-1}{3-q}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^{\frac{2(q-1)}{3-q}} \tag{A.90}$$

$$\Delta_q = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q-1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}\right]^{\frac{2(q-1)}{3-q}} \tag{A.91}$$

Referências Bibliográficas

AFSAR, O.; TIRNAKLI, U. Generalized Huberman-Rudnick scaling law and robustness of q-Gaussian probability distributions. p. 13, nov. 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1211.1838>.

ARRUDA, T. et al. *Physics Letters A*, v. 372, n. 15, p. 2578–2582, 2008.

AÑAÑOS, G.; TSALLIS, C. Ensemble Averages and Nonextensivity at the Edge of Chaos of One-Dimensional Maps. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 2, p. 1–4, jul. 2004. ISSN 0031-9007.

BANERJEE, S.; YORKE, J.; GREBOGI, C. Robust chaos. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, n. 14, p. 3049–3052, abr. 1998.

BECK, C.; SCHöGL, F. *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction (Cambridge Nonlinear Science Series)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. Paperback.

BORGES, E. P. On a q -generalization of circular and hyperbolic functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 31, n. 23, p. 5281, 1998.

BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics. *Physica A*, v. 340, n. 1-3, p. 95–101, set. 2004.

BORGES, E. P. *Manifestações Dinânicas e Termodinâmicas de Sistemas Não-Extensivas*. Tese (Doutorado), 2004.

BORGES, E. P.; TIRNAKLI, U. Mixing and relaxation dynamics of the Hénon map at the edge of chaos. *Physica D*, v. 193, n. 1-4, p. 148–152, jun. 2004.

BORGES, E. P.; TIRNAKLI, U. Two-dimensional dissipative maps at chaos threshold: sensitivity to initial conditions and relaxation dynamics. *Physica A*, v. 340, n. 1-3, p. 227–233, set. 2004.

BORGES, E. P. et al. Nonequilibrium Probabilistic Dynamics of the Logistic Map at the Edge of Chaos. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, n. 25, p. 15–18, dez. 2002.

BURLAGA, L.; VIñAS, A. Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanics observed by voyager 1 in the distant heliosphere. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 356, n. 2–4, p. 375 – 384, 2005. ISSN 0378-4371.

Callen, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, 2nd Edition.* [S.l.: s.n.], 1985.

COSTA, U. M. S. et al. Power-law sensitivity to initial conditions within a logisticlike family of maps: Fractality and nonextensivity. *Phys. Rev. E*, AMERICAN PHYSICAL SOC, v. 56, n. 1, Part A, p. 245–250, jul. 1997.

da Silva, C. R.; da Cruz, H. R.; Lyra, M. L. *Braz. J. Phys.*, v. 29, p. 144–152, mar. 1999.

JAGANATHAN, R.; SINHA, S. A q-deformed nonlinear map. *Phys. Lett. A*, v. 338, n. 3-5, p. 277–287, maio 2005.

KHACHATRYAN, V. et al. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Physical Review Letters*, v. 105, n. 2, p. 8479, jul. 2010.

LATORA, V.; BARANGER, M. Kolmogorov-Sinai Entropy Rate versus Physical Entropy. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 3, p. 520–523, jan. 1999.

LATORA, V. et al. The rate of entropy increase at the edge of chaos. *Phys. Lett. A*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 273, n. 1-2, p. 97–103, 2000.

LYRA, M.; TSALLIS, C. Nonextensivity and Multifractality in Low-Dimensional Dissipative Systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, n. 1, p. 53–56, jan. 1998.

MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, n. 5560, p. 459–67, jun. 1976. ISSN 0028-0836. Disponível em: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/934280>.

MOURA, F. de; TIRNAKLI, U.; LYRA, M. L. Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality, and nonextensivity. *Phys. Rev. E*, AMERICAN PHYSICAL SOC, v. 62, n. 5, Part A, p. 6361–6365, nov. 2000.

NIVANEN, L.; MÉHAUTÉ, A. L.; WANG, Q. A. Generalized algebra within a nonextensive statistics. *Rep. Math. Phys.*, v. 52, n. 3, p. 437–444, 2003.

NUSSENZVEIG, H. *Complexidade e Caos*. [S.l.]: Editora UFRJ/COPEA, 1999. (Coleção COPEA). ISBN 9788571082212.

PENNINI, F.; PLASTINO, a.; FERRI, G. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 23, p. 5778–5785, 2008.

PESSOA, R. W. S.; BORGES, E. P. Generalising the logistic map through the q-product. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 285, 2011.

PRATO, D.; TSALLIS, C. Nonextensive foundation of lévy distributions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, p. 2398–2401, Aug 1999.

ROBLEDO, a. Incidence of nonextensive thermodynamics in temporal scaling at Feigenbaum points. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 370, n. 2, p. 449–460, out. 2006. ISSN 03784371. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037843710600690X>.

RUIZ, G.; TSALLIS, C. Nonextensivity at the edge of chaos of a new universality class of one-dimensional unimodal dissipative maps. *The European Physical Journal B*, v. 67, n. 4, p. 577–584, fev. 2009. ISSN 1434-6028.

SCARFONE, A. M.; SUYARI, H.; WADA, T. *Central European Journal of Physics*, v. 7, n. 3, p. 414–420, 2009.

SCHUSTER, H.; JUST, W. *Deterministic chaos: an introduction*. [S.l.]: Wiley-VCH, 2005.

SILVA, R.; ANSELMO, D. H. A. L.; ALCANIZ, J. S. Nonextensive Quantum H-Theorem. p. 1–5, 2009.

SORNETTE, D. Discrete-scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, v. 297, n. 5, p. 239 – 270, 1998. ISSN 0370-1573.

SUYARI, H. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 368, n. 1, p. 63–82, 2006.

SUYARI, H.; TSUKADA, M. Law of Error in Tsallis Statistics. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 51, n. 2, p. 753–757, 2005.

TIRNAKLI, U.; BECK, C.; TSALLIS, C. Central limit behavior of deterministic dynamical systems. *Phys. Rev. E*, AMERICAN PHYSICAL SOC, v. 75, n. 4, Part 1, p. 040106, 2007.

TIRNAKLI, U.; TSALLIS, C. *Phys. Rev. E*, AMERICAN PHYSICAL SOC, v. 73, n. 3, Part 2, p. 037201, mar. 2006.

TIRNAKLI, U.; TSALLIS, C.; BECK, C. Closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos. *Phys. Rev. E*, v. 79, n. 5, p. 056209, maio 2009.

TIRNAKLI, U.; TSALLIS, C.; BECK, C. Closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 79, p. 056209, May 2009.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, v. 52, n. 1-2, p. 479–487, jul. 1988.

TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2009. Hardcover.

TSALLIS, C. Some Open Points in Nonextensive Statistical Mechanics. *Entropy*, v. 1, n. 1, p. 30, fev. 2011.

TSALLIS, C. et al. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical review letters*, APS, v. 75, n. 20, p. 3589–3593, 1995.

TSALLIS, C. et al. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of lévy distributions in nature. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 3589–3593, Nov 1995.

TSALLIS, C.; PLASTINO, A. R.; ZHENG, W. M. Power-law sensitivity to initial conditions - New entropic representation. *Chaos Sol. Fract.*, PERGAMON-ELSEVIER SCIENCE LTD, v. 8, n. 6, p. 885–891, jun. 1997.

TSALLIS, C.; QUEIROS, S. M. D. Nonextensive statistical mechanics and central limit theorems I - Convolution of independent random variables and q-product. *Arxiv preprint arXiv:0709.4656*, p. 13, set. 2007. Disponível em: <`http://arxiv.org/abs/0709.4656`>.

UMAROV, S.; TSALLIS, C.; STEINBERG, S. *Milan Journal of Mathematics*, v. 76, n. 1, p. 307–328, 2008.

VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, v. 10, p. 113–121, 1838.